Eksamen TFY4163 Bølgefysikk og fluidmekanikk S2021

1 Fisketur

Du sitter og fisker med dupp fra en båt som er ankret opp.

Bølgene som går forbi båten har vertikalt utslag y gitt av

$$y(x,t) = (3.75\,\mathrm{cm})\cos\big((3.75\,\mathrm{cm}^{-1})x + (5.4\,\mathrm{s}^{-1})t\big) \tag{1}$$

Hvor lang tid tar det for én periode av bølgemønsteret å passere duppen?

Med hvilken hastighet beveger bølgetoppene seg?

Hva er den høyeste hastigheten til duppen som beveger seg opp og ned med bølgene (anta at duppen har kun vertikal bevegelse)?

Solution: Vinkelfrekvensen $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 5.4\,\mathrm{s}^{-1}$ er oppgitt slik at en periode blir

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5.4\,\mathrm{s}^{-1}} = 1.2\,\mathrm{s} \tag{2}$$

Bølgen beveger seg med en hastighet

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{5.4\,\mathrm{s}^{-1}}{3.75\,\mathrm{cm}^{-1}} = 1.4\,\mathrm{cm\,s}^{-1} = 1.4\times10^{-2}\,\mathrm{m\,s}^{-1} \tag{3}$$

Vi antar at duppen følger bølgens vertikale utslag slik at hastigheten v_p er gitt av $v_p = \partial_t y$. Skriver vi bølgen som

$$y = A\cos(kx - \omega t) \tag{4}$$

får vi

$$v_p = -A\omega\sin(kx - \omega t) \tag{5}$$

med maksimalverdi

$$v_{p,max} = A\omega = 3.75\,\mathrm{cm}\cdot 5.4\,\mathrm{s}^{-1} = 0.20\,\mathrm{m\,s}^{-1} \tag{6}$$

2 Tog

Du står på en togstasjon hvor et tog passerer med konstant fart mens det blåser i fløyte. Du hører en *kontinuerlig* reduksjon i frekvensen på lyden fra fløyta fra toget kommer mot deg til det går fra deg. Hvorfor hører du denne kontinuerlig reduksjonen i frekvensen?

Solution: Endring i frekvens er forårsaket av Doppler-effekten. Når toget kommer mot deg blir frekvensen høyere enn når det står stille og når det går fra deg blir den lavere. Frekvensendringen er avhengig av hastighetskomponenten til toget langs lydbølgens retning mot mottakeren. Ettersom toget kommer nærmere øker denne vinkelen, hastighetskomponenten blir mindre og frekvensøkningen minker. Når toget går fra deg øker hastighetskomponenten og frekvensreduksjonen blir større.

3 Bølge på streng

En streng med lengde 75.0 cm og masse 16.5 g er spent opp med en justerbar snorkraft. En bølge med bølgelengde 3.0 cm propagerer på strengen. Hva må snorkraft være for at et punkt på strengen da skal svinge med 875 svingninger per sekund.

Solution: Frekvensen er koblet til bølgelengden via bølgehastigheten, $v = \lambda f$. Videre er bølgehastigheten for en transversal bølge på en streng gitt av $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$. Snorkraften T i strengen blir dermed

$$T = \mu(\lambda f)^2 = \frac{16.5 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg}}{0.75\,\mathrm{m}}(0.030\,\mathrm{m} \cdot 875\,\mathrm{Hz})^2 = 15\,\mathrm{N} \tag{7}$$

4 Lydstyrke

En lydkilde sender ut en lydbølge homogent i alle retninger. I et punkt A, 3.0 m fra kilden, blir lydstyrken målt til 53 dB.

Hva er intensiteten (W/m^2) til lyden i dette punktet?

Hvor langt må vi bevege oss fra A før intensiteten har falt til en fjerdedel av det den var i A?

Hvor langt må vi bevege oss fra kilden før lydstyrken har falt til en fjerdedel av det den var i A (altså at lydstyrken har blitt 53/4 dB)?

Solution: Lydstryken β er definert som

$$\beta = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \mathrm{dB} \tag{8}$$

Vi finner dermed intensiteten I som

$$I = I_0 \cdot 10^{\beta/10\,\mathrm{dB}} = 1 \times 10^{-12}\,\mathrm{W\,m^{-2}} \cdot 10^{5.3} = 2.0 \times 10^{-7}\,\mathrm{W\,m^{-2}} \tag{9}$$

Intensiteten til en bølge som sender ut en bølge homogent i alle retninger (en sfærisk bølge) må følge en funksjon

$$I(r) = \frac{k}{r^2} \tag{10}$$

hvor k er en konstant. Vi får dermed

$$r_x^2 = \frac{k}{I_x} = \frac{r_A^2 I_A}{I_A/4} = 4r_A^2 \tag{11}$$

slik at

$$r_x = 2r_A = 6.0\,\mathrm{m} \tag{12}$$

Vi må altså bevege oss $r_x - R_A = 3.0\,\mathrm{m}$ før lydstyrken faller til en fjerdedel.

Setter vi sammen 8 og 10 får vi

$$r_x^2 = \frac{k}{I_0}\frac{1}{10^{\beta_x/10\,\mathrm{dB}}} \tag{13}$$

Bruker vi tilsvarende uttryk for r_A, løser for k og setter inn finner vi

$$r_x^2 = r_A^2 10^{(\beta_A-\beta_x)/10\,\mathrm{dB}} = (3.0\,\mathrm{m})^2 \cdot 10^{5.3\cdot(1-\frac{1}{4})} \tag{14}$$

som gir

$$r_x = 291\,\mathrm{m} \tag{15}$$

5 Panfløyte

En panfløyte består av rør med ulike lengder som er åpne i begge ender. Tonen man får fra hvert rør bestemmes av lengden på rørene.

Hvor langt må et rør i en panfløyte være for å at det skal gi tonen A (440 Hz)?

Solution: I et rør som er åpent i begge ender får vi like grensebetingelser i begge ender og grunntonen (den stående bølgen med den lengste bølgelengden) har bølgelengde $\lambda = 2L$, hvor L er lengden på røret. Bølgehastigheten gir sammenhengen mellom frekvens og bølgelengde $v = \lambda f$. Vi får da

$$L = \frac{\lambda}{2} = \frac{v}{2f} = \frac{343\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{2\cdot 440\,\mathrm{Hz}} = 0.39\,\mathrm{m} \tag{16}$$

(Har i ettertid blitt fortalt at de fleste panfløyter har en lukket ende slik at lengste bølgelengde er 4L og at røret da kunne vært halvparten så langt.)

6 Strømningsfunksjonen

Hvilke fysiske betingelser må vi ha for å at vi kan definere en strømningsfunksjon ψ? Uttrykk disse betingelsene matematisk om mulig.

Solution: For at vi skal kunne definere en strømningsfunksjon må fluidet være inkompressibelt og strømningen være 2-dimensjonal og stasjonær.

At fluidet er inkompressibelt uttrykes ved at

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0 \tag{17}$$

og at det er to-dimensjonalt ved at v kun er en funksjon av to-variabler (og dermed stasjonær).

$$\boldsymbol{v} = f(x,y)\hat{\mathbf{x}} + g(x,y)\hat{\mathbf{y}} \tag{18}$$

7 Strømningsfunksjonen II

Søk opp uttrykket for curl til et vektorfelt $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{f}$ i sylindriske koordinater (siter kilde).

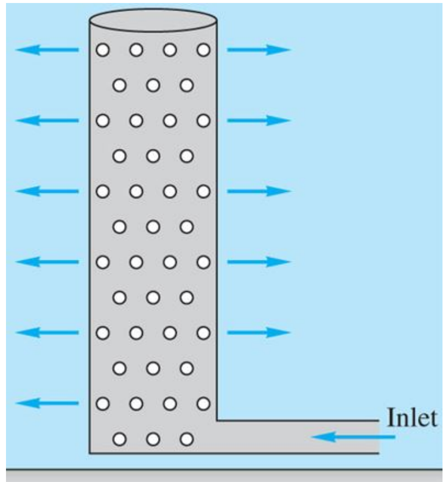


Figure 1: Oppgave 8

Anta at vi har to-dimensjonal strømning $\boldsymbol{v}(r,\phi) = (v_r(r,\phi), v_\phi(r,\phi), 0)$ i et inkompressibelt fluid, uttrykt i sylindriske koordinater

Bruk dette til å vise at relasjonen mellom strømningsfunksjonen ψ og hastighetsfeltet $\boldsymbol{v}$ for et to-dimensjonal hastighetsfelt $\boldsymbol{v}(r,\phi)$ i sylindriske koordinater er

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{r}\partial_\theta \psi \\ v_\theta &= -\partial_r \psi \end{aligned} \tag{19}$$

Solution: I sylindriske koordinater har vi

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\nabla}\times \boldsymbol{f})_r &= \frac{1}{r}\partial_\phi f_z - \partial_z f_\phi \\ (\boldsymbol{\nabla}\times \boldsymbol{f})_\phi &= \partial_z f_r - \partial_r f_z \\ (\boldsymbol{\nabla}\times \boldsymbol{f})_z &= \frac{1}{r}\left(\partial_r r f_\phi - \partial_\phi f_r\right) \end{aligned} \tag{20}$$

Kontinuitetslikningen gir oss at for et inkompressibelt fluid eksisterer det en $\boldsymbol{\psi}$ slik at $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{v}$. Ettersom vi har to-dimensjonal strømning har vi ingen z-variasjon slik at alle ledd med $\partial_z(\cdot)$ forsvinner og $v_z = 0$. Bruker vi uttrykket for curl i sylindriske koordinater sitter vi da igjen med (setter $\psi_z = \psi$).

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{r}\partial_\phi \psi \\ v_\phi &= -\partial_r \psi \end{aligned} \tag{21}$$

8 Strømningsfunksjonen III

Anta at vi har et perforert rør som vist i figur 1 som slipper ut kjølevann fra et kraftverk. Røret har en lengde $L = 8.0\,\mathrm{m}$ og diameter $d = 55\,\mathrm{cm}$ og er perforerte med mange små hull som slipper ut kjølevannet.

Vi modellerer dette som en linjekilde (tilnærmet 2D strømning med ingen variasjon langs kilden.). Vi lar z-aksen i et sylindrisk koordinatsystem ligge langs røret. Strømningsfunksjonen for en slik kilde er gitt av $\psi = m\theta$, hvor m kalles *styrken* på kilden.

Gitt at vi har en volumstrøm $Q = 20$ L/s inn i røret, hva blir styrken m til kilden?

Solution:
Den radielle hastigheten v_r er gitt av

$$v_r = \frac{1}{r}\partial_\phi(m\phi) = \frac{m}{r} \tag{22}$$

Volumstrømmen er gitt av

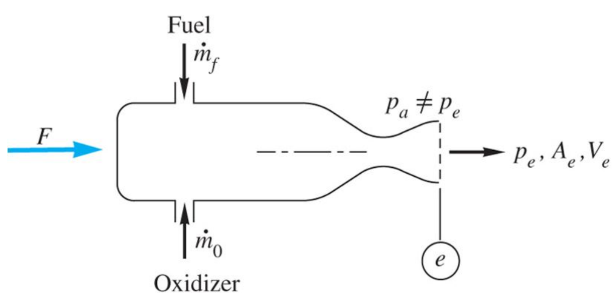
$$Q = \int_S \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = v_r \pi d L = \frac{m}{r}\pi d L = m2\pi L \tag{23}$$

slik at

$$m = \frac{Q}{2\pi L} = \frac{20\,\mathrm{L\,s^{-1}}}{2\pi\cdot 8.0\,\mathrm{m}} = 0.40\times 10^{-3}\,\mathrm{m^2/s} \tag{24}$$

9 Transportteoremet

Vi har en rakettmotor som er festet til en testrigg slik at motoren holdes fast. Motoren holdes fast med en kraft F fra riggen (se figur). Eksosgassen strømmer ut med supersonisk hastighet V_e slik at trykket p_e ved utgangen e er $p_e > p_a$, hvor p_a er atmosfæretrykket. Tverrsnittsarealet til utgangen er A_e. Tettheten til eksosgassen ved utgangen er ρ_e. Uttrykk F med de oppgitte variablene (Hint: Bruk transportteoremet).



Solution: Vi tar utgangspunkt i transportteoremet

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\beta\,\mathrm{d}V + \oint_S \rho\beta(\boldsymbol{v}\cdot\hat{n})\,\mathrm{d}A \tag{25}$$

for impulsbevaring slik at $B = m\boldsymbol{v}$, $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}$, $\beta = \boldsymbol{v}$.

Vi lar kontrollvolumet omslutte raketten. Da er volumet konstant og vi antar at ρ og $\boldsymbol{v}$ er konstante i volumet (stasjonær tilstand) slik at leddet med volumintegralet blir null.

Vi ser på kraftkomponentene langs lengdeaksen til motoren (slik at innstrømning av reagenser ikke bidrar) og lar positiv retning være mot venstre.

Vi trekker fra et konstant trykk p_a fra hele overflaten (som ikke gir noen netto endring i kraften) slik at trykket blir null over hele flaten bortsett fra ved utgangen hvor trykket blir $p_e - p_a$ og dette er konstant over utgangens areal.

Transportteoremet kan da skrives

$$\sum F = F + (p_e - p_a)A = \rho(-V_e)V_e A \tag{26}$$

slik at kraften blir

$$F = -(\rho V_e^2 A + (p_e - p_a)A_e) \tag{27}$$

10 Strømningsfelt

Et inkompressibelt fluid er begrenset av to uendelig store parallelle flater i xz-planet. Avstanden mellom platen er h. Den øverste flaten beveger seg i positiv x-retning med en hastighet U_0 og vi antar at fluidet kun strømmer i x-retning. Vi antar heftbetingelser ved alle overflater. I væsken er det kun en trykkgradient, $\partial_x p = A > 0$ i x-retning. Vi ser bort fra gravitasjon og antar en stasjonær tilstand.

La $y = 0$ ved den nederst platen som er i ro. Bestem y-verdien til det planet (i tilegg til $y = 0$) hvor hastigheten til fluidet er lik null (dersom det eksisterer).

Solution: Siden $\boldsymbol{v}$ kun har en x-komponent blir kontinuitetslikningen

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \partial_x v_x = 0 \tag{28}$$

Ettersom vi ikke har noen variasjon i z-retning må v_x dermed være en funksjon kun av y, $v_x = f(y)$.

I NS vil $\partial_t \boldsymbol{v} = 0$ siden vi har en stasjonær tilstand og $v_x \partial_x v_x = 0$ siden v_x bare er en funksjon av y.

Siden vi også neglisjerer gravitasjon står vi da igjen med

$$0 = \partial_x p + \mu \partial_y^2 v_x \tag{29}$$

eller

$$\partial_y^2 v_x = A' \tag{30}$$

hvor $A' = A/\mu$.

Antideriverer vi denne to ganger får vi

$$v_x = A'' y^2 + By + C \tag{31}$$

hvor $A'' = A'/2$

hvor B og C er konstanter som bestemmes av grenseverdiene. Fra $v_x(0) = 0$ får vi $C = 0$ og fra $v_x(h) = U_0$ får vi

$$B = \frac{U_0 - A'' h^2}{h} \tag{32}$$

For å finne y-verdi hvor hastigheten er lik null løser vi likningen

$$v_x = A''y^2 + \frac{U - A''h^2}{h} y = 0 \tag{33}$$

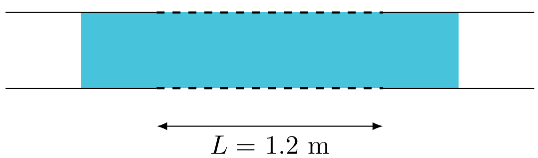
som gir

$$y = h - \frac{U}{hA''} = h - \frac{2U\mu}{hA} \tag{34}$$

Dette gir dermed en y-verdi hvor hastigheten er null så fremt $\frac{U}{A}$ ikke er så stor at det siste leddet blir større enn h.

11 Perforert rør

En inkompressibel væske strømmer gjennom et rør som er 8 cm i diameter. I et 1.2 m langt segment av røret er det en perforert del hvor det strømmer væske ut av røret med en uniform gjennomsnittlig hastighet på 15 cm/s (altså gjennomsnittlig over hele segmentets areal, ikke bare hullenes areal). Dersom gjennomsnittlig hastighet til fluidet er 12 m/s ved begynnelsen av det perforerte området, hva er den ved utgangen av det perforerte området?



Solution: Vi setter opp transportteoremet for et kontrollvolum som består av en sylinder langs ytterveggene i det perforerte området. Masse er bevart, systemet er stasjonært så alle tidsderiverte forsvinner, og hastigheten antas konstant over de ulike flatene i kontrollvolumet.

Vi får da at

$$0 = -\rho v_1 A_t + \rho v_e A_p + \rho v_2 A_t \tag{35}$$

Vi har konstant massetettehet og får dermed at

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{v_1 A_t - v_e A_p}{A_t} = v_1 - v_e \frac{A_p}{A} \\ &= 12\,\mathrm{m\,s^{-1}} - 15 \times 10^{-2}\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot \frac{\pi \cdot 8 \times 10^{-2}\,\mathrm{m} \cdot 1.2\,\mathrm{m}}{\pi \cdot (4 \times 10^{-2}\,\mathrm{m})^2} \\ &= 3.0\,\mathrm{m\,s^{-1}} \end{aligned} \tag{36}$$

12 Potensialstrømning

Gitt strømningsfeltet

$$\begin{aligned} v_x &= U_0(1 + \frac{x}{L}) \\ v_y &= -U_0 \frac{y}{L} \end{aligned} \tag{37}$$

Bestem hastighetspotensialet til dette strømningsfeltet.

Bonusoppgave: Skisser hastighetspotensialet for $L = 0.5$ m og $U_0 = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ og ulike verdier av ϕ (Bruk gjerne et dataverktøy for dette).

Solution:

$$v_x = \partial_x \phi = U_0(1 + \frac{x}{L}) \tag{38}$$

som gir

$$\phi = U_0(x + \frac{x^2}{2L}) + f(y) \tag{39}$$

Fra

$$v_y = \partial_y \phi = -U_0 \frac{y}{L} \tag{40}$$

får vi

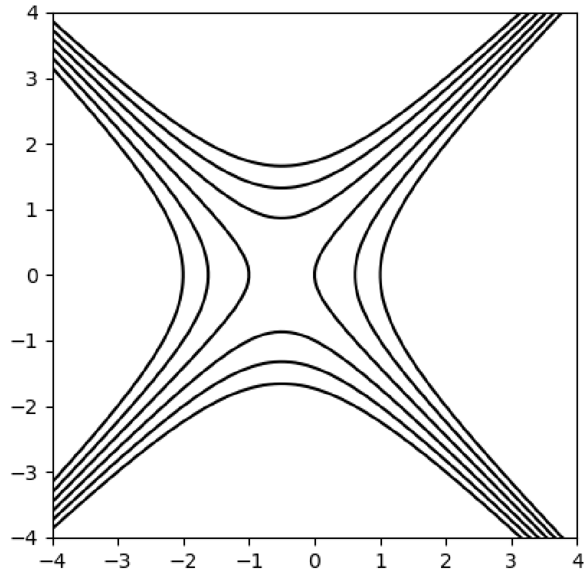
$$\phi = -U_0 \frac{y^2}{2L} + f(x) \tag{41}$$

Hastighetspotensialet kan dermed skrives

$$\phi = U_0(x + \frac{1}{2L}(x^2 - y^2)) \tag{42}$$

For å skissere hastighetspotensialet lager vi en graf av løsningene til likningen for ulike verdier av ϕ. En skisse av hastighetspotensialet (med koden som genererte figuren) er vist nedenfor.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def yy(x,phi):
    y = np.sqrt(x**2 + x - phi)
    return y

#Inverse function for phi values that makes argument of square root negative
def xx(y,phi,sign):
    y = (-1 + sign*np.sqrt(1+4*(phi+y**2)))/2
    return y

x = np.linspace(-4,4,100);
y = np.linspace(-4,4,100);

fig = plt.figure()

for phi in range(-3,0,1):
    plt.plot(x,yy(x,phi),'k')
    plt.plot(x,-yy(x,phi),'k')

for phi in range (0,3,1):
    plt.plot(xx(y,phi,1),y,'k')
    plt.plot(xx(y,phi,-1),y,'k')
ax = fig.gca()
ax.set_aspect('equal')
ax.set_xlim([-4,4])
ax.set_ylim([-4,4])
plt.show()
```


4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4