1 Regneoppgaver

1. En maur med ambisjoner om å bli astronaut står på et stramt tau som er spent opp med en kraft T. Tauet har massetetthet (masse per lengde) μ. En trener fra NASA starter en harmonisk bølge med bølgelengde λ som forplanter seg langs tauet. Vi antar at maurens masse er så liten at den ikke påvirker svingningen. Vi ser også bort fra tyngdekraftens virkning på tauets bevegelse. Tyngdens akselerasjon er g.

   Finn et uttrykk for den minste amplituden A bølgen kan ha for at mauren skal føle seg vektløs en gang i løpet av svingningen, uttrykt ved de oppgitte variablene.

   Solution: For at mauren skal føle seg vektløs må tauets akselerasjon a være minst like stor som tyngdens akselerasjon.

   Tauets bevegelse $x(t)$ kan beskrives som en harmonisk bølge

   $$x(t) = A\sin(kx - \omega t) \tag{1}$$

   Akselerasjon til tauet er $a = \ddot{x}$ slik at amplituden til akselerasjonen a_m er gitt av

   $$a_m = A\omega^2 \tag{2}$$

   Vinkelfrekvensen ω kan uttrykkes ved de oppgitte størrelsene som $\omega = vk = \sqrt{\frac{T}{\mu}}\frac{2\pi}{\lambda}$.

   Vi kan da sette $a_m = g$, sette inn for ω og løse for A som gir

   $$A = \frac{g\lambda^2\mu}{4\pi^2 T}. \tag{3}$$

2. Du ønsker å måle temperaturen i et rør med lengde L fylt med gass men kommer ikke til med et termometer. Røret er lukket i den ene enden og åpent i den andre. I et øyeblikk av gudommelig inspirasjon kommer du på at du bare kan plassere en liten høytaler ved den åpne enden (enden er fortsatt åpen). Høytaleren sender ut en harmonisk bølge. Når du øker frekvensen til den utsendt bølgen fra null blir lyden veldig høy ved en frekvens f_0. Gassen har molar masse (masse per stoffmengde) M og adiabatkonstant γ. La den universelle gasskonstanten være uttrykt ved R. Finn et uttrykk for temperaturen T i gassen i røret, uttrykt ved det oppgitte størrelsene.

   Solution: Bølgehastigheten til en gass er gitt av

   $$v = \sqrt{\gamma\frac{RT}{M}} \tag{4}$$

   Ved å bruke $v = \lambda f$ kan vi løse for T

   $$T = \frac{(\lambda f)^2 M}{\gamma R} \tag{5}$$

   I et rør med én åpen og én lukket ende er den laveste ressonansmoden, ved frekvensen f_0 gitt av

   $$\lambda = 4L \tag{6}$$

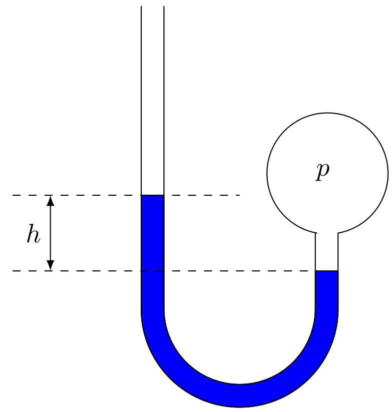


Figure 1: Oppgave 3. Manometer for å måle blodtrykk. Trykket p er blodtrykket. Den venstre søylen er åpen til atmosfæretrykket.

Vi får dermed

$$T = \frac{16L^2 f_0^2 M}{\gamma R} \tag{7}$$

3. Blodtrykk er angitt som *systolisk* blodtrykk (det høyeste trykket i blodårene når hjertet trekker seg sammen) og *diastolisk* blodtrykk (trykket i blodårene mellom hjerteslagene). Ved normalt blodtrykk ligger diastolisk blodtrykk på omtrent 11 kPa og systolisk blodtrykk på omtrent 16 kPa. Ved høyt blodtrykk kan dette trykket øke til 35 kPa. Dette trykket er et overtrykk, relativt til atmosfæretrykket. Massetettheten til kvikksølv er $13{,}5 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$

   Anta at vi måler trykket p i blodåren med et kvikksølvmanometer som vist i figuren (trykket p i kolben er altså antatt likt blodtrykket). Hvor høy bør den lange søylen på et slikt manometer minimum være (slik at kvikksølvet ikke renner ut)?

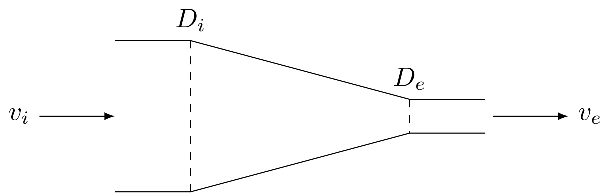
   Hvor høyt vil kvikksølvet stige ved normalt blodtrykk (angi både for diastolisk og systolisk trykk).

Solution: Væsken vil stige til en høyde $z = \frac{p}{\rho g}$. Setter vi trykket til det høyest mulige trykket, antatt 35 kPa, får vi at maksimal høyde blir

$$z = \frac{p}{\rho g} = \frac{35\,\mathrm{kPa}}{13{,}5 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 0{,}26\,\mathrm{m} \tag{8}$$

Det virker da rimelig at manometeret må være minst 30 cm høyt.

Setter vi inn for normalt systolisk og diastolisk blodtrykk får vi $z_s = 0{,}12\,\mathrm{m} = 121\,\mathrm{mm}$ og $z_d = 0{,}083\,\mathrm{m} = 83\,\mathrm{mm}$ (Det er disse tallene man referer til når man sier en pasient har blodtrykk 120-over-80, skrives 120/80).

4. 

Luft strømmer gjennom et konisk rør med sirkulært tverrsnitt (se figur). Inngangshastigheten $v_i = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ Vi antar at innsnevringen er tilstrekkelig slak til at vi kan anta 1-dimensjonal strømning. La forholdet mellom diametrene ved inn- og utgang være gitt av $r = \frac{D_e}{D_i}$. Hvor liten kan r være for at vi skal kunne anta inkompressibel strømning? Generelt antar vi at vi kan anta inkompressibel strømning når Mach tallet er mindre enn 0.3. Mach-tallet M er forholdet mellom strømningshastigheten v og lydhastigheten c.

$$M = \frac{v}{c} \tag{9}$$

La lydhastigheten for luft være $340\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Solution: For å oppfylle massebevaring øker hastigheten i innsnveringen. For å sikre inkompressibel strømning må vi ha Mach-tall under 0.3, altså at

$$v < 0.3c \tag{10}$$

Fra massebevaring har vi for inkompressibel strømning at

$$v_i A_i = v_e A_e \tag{11}$$

Setter vi inn for arealet $A = \frac{\pi}{4} D^2$ får vi

$$r = \frac{D_e}{D_i} = \left(\frac{v_i}{v_e}\right)^2 \tag{12}$$

Lar vi den maksimale utgangshastigheten være $v_e = 0.3c$ får vi

$$r = \left(\frac{v_i}{0.3c}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{10\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{0.3 \cdot 340\,\mathrm{m\,s^{-1}}}\right)^{\frac{1}{2}} = 0.31 \tag{13}$$

5. Anta to-dimensjonal, inkompressibel, stasjonær strømning mellom to uendelig store plater i xz-planet. Vi antar strømning i x-retning og lar den nederste platen være ved $y = 0$ og den øverste platen ved $y = h$. Det er ingen variasjon i z-retning (to-dimensjonalt). Vi ser bort fra gravitasjon.

   Dersom den øverste platen beveger seg med hastighet u_0 og den nederste platen er i ro og vi ikke har noen trykkgradient (såkalt Couette-strømning) er hastighetsprofilen $u(y)$ gitt av

$$u(y) = u_0 \frac{y}{h} \tag{14}$$

   Dersom derimot også den øverste platen er i ro men vi har en konstant trykkgradient $\partial_x p$ (såkalt Poiseuille-strøming) er hastighetsprofilen gitt av

$$u(y) = \frac{\Pi}{2}(y^2 - hy) \tag{15}$$

hvor vi har satt $\Pi = \partial_x p/\mu$

Men hva blir hastighetsprofilen dersom den øverste platen beveger seg med hastighet u_0 *og* vi har enn konstant trykkgradient $\partial_x p$?

Du kan enten løse Navier-Stokes likning direkte for å besvare spørsmålet eller gjøre en velbegrunnet kombinasjon av løsningene over.

Solution:

Metode I

Siden vi har et stasjonær system forsvinner den tidsderiverte fra NS. Basert på geometrien er det konvektive leddet lik null (setter $u = v_x$),

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = u\partial_x u(y) = 0 \tag{16}$$

Vi ser bort fra gravitasjon og for det første systemet reduserer NS da til

$$\partial_y^2 u = 0 \tag{17}$$

For det andre systemet reduserer NS til

$$\partial_y^2 u = \Pi \tag{18}$$

For det tredje systemet som det spørres om ender vi også opp med

$$\partial_y^2 u = \Pi \tag{19}$$

men med andre grensebetingelser. Dersom vi kaller løsningene for de to første systemene for henholdsvis u_1 og u_2 ser vi at $u_3 = u_1 + u_2$ også er en løsning på det tredje systemet

$$\partial_y^2 u_3 = \partial_y^2 (u_1 + u_2) = \partial_y^2 u_1 + \partial_y^2 u_2 = 0 + \Pi = \Pi \tag{20}$$

Men vi må sjekke at grensbetingelsene også stemmer.

$$u_3(0) = u_1(0) + u_2(0) = 0 + 0 = 0 \tag{21}$$

$$u_3(h) = u_1(h) + u_2(h) = u_0 + 0 = u_0 \tag{22}$$

Ettersom $u_1 + u_2$ oppfyller likningen og grensebetingelsene er det løsningen som ble etterspurt altså

$$u(y) = \frac{\Pi}{2}(y^2 - hy) + u_0\frac{y}{h} \tag{23}$$

Metode II

Vi kan også løse likningen

$$\partial_y^2 u = \Pi \tag{24}$$

ved å integrere to ganger som gir oss

$$u = \frac{\Pi}{2} y^2 + ay + b \tag{25}$$

Bruker vi grensebetingelsene $u(0) = 0$ og $u(h) = u_0$ gir den første oss at $b = 0$ og den andre at $a = \frac{u_0}{h} - \frac{\Pi}{2} h$ som gir

$$u(y) = \frac{\Pi}{2}(y^2 - hy) + u_0 \frac{y}{h} \tag{26}$$

6. Navier-Stokes likning kan utledes fra å skrive opp Newtons andre lov, $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ for en tenkt fluid-partikkel. Vi uttrykker Navier-Stokes likning via hastighetsfeltet $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$.

   Forklar hvorfor akselerasjon i Newtons andre lov må skrives som

$$\mathbf{a} = \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \tag{27}$$

   mens i mange tilfeller er

$$\mathbf{a} \neq \partial_t \mathbf{v} \tag{28}$$

Solution: Newtons andre lov henviser til akselerasjonen til en gitt partikkel. Hastighetsfelt $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ gir hastigheten i et gitt punkt på et gitt tidspunkt. Om vi tar den partiellderiverte av $\mathbf{v}$ med hensyn på t får vi hvordan hastigheten endrer seg i et gitt punkt og ikke hvordan hastigheten endrer seg for en gitt partikkel.

For å finne akselerasjonen til en partikkel kan vi la argumententet $\mathbf{r}$ følge posisjonen $\mathbf{r}(t)$ til en partikkel. Hastigheten til en partikkel blir da $\mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t)$. Vi kan så deriverer denne med hensyn på t ved å bruke kjerneregelen for å finne akselerasjonen til en partikkel,

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t) &= \partial_x \mathbf{v} \cdot \partial_t x + \partial_y \mathbf{v} \cdot \partial_t y + \partial_z \mathbf{v} \cdot \partial_t z + \partial_t \mathbf{v} && (29)\\
&= v_x \partial_x \mathbf{v} + v_y \partial_y \mathbf{v} + v_z \partial \mathbf{v} + \partial_t \mathbf{v} && (30)\\
&= (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \partial_t \mathbf{v} && (31)
\end{aligned}$$

7. Anta at vi har en demning som vist i figur 2. Dybden d på vannet som holdes på plass av demningen er 60 m.

   Om vi lar origo O være i punktet hvor vannets overflate treffer demningen og koordinatsystemet som vist i figuren, kan demningens form under vannet beskrives av

$$x = ay^2 \tag{32}$$

   hvor $a = 0{,}010\,\mathrm{m}^{-1}$.

   Hva blir den horisontale og vertikale kraft per dybde inn i planet fra vannet på demningen?

   La atmosfæretrykket være $p_a = 101\,\mathrm{kPa}$ og vannets massetetthet $\rho = 997\,\mathrm{kg/m^3}$.

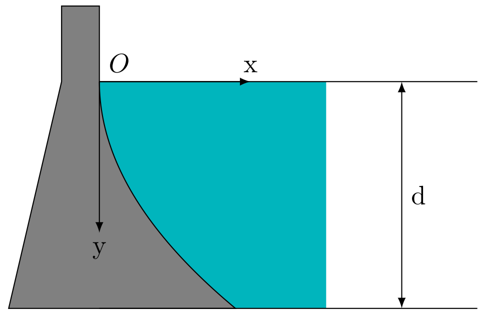
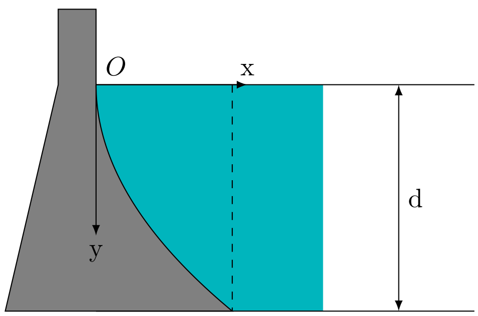


Figure 2: Oppgave 7.

Solution:

Betrakt volumet av vannet til venstre for den stiplet linjen i figuren.



For at dette volumet skal være i statisk likevekt må den horisontale kraften fra dammen på volumet være lik kraften fra vannet på den høyre siden av volumet. Vi finner kraften ved å integrere trykket over arealet (b er dybde inn i planet),

$$
\begin{aligned}
F_h &= \int p \,\mathrm{d}A && (33)\\
&= \int (p_a + \rho g y) b \,\mathrm{d}y && (34)\\
&= p_a y + \frac{1}{2}\rho g y^2 \Big|_0^d b && (35)\\
&= (p_a + \frac{1}{2}\rho g d) b d && (36)
\end{aligned}
$$

Horisontal kraft per dybde f_h inn i planet blir

$$
\begin{aligned}
f_h &= (p_a + \frac{1}{2}\rho g d) d && (37)\\
&= (101 \times 10^3\,\mathrm{Pa} + \frac{1}{2} \cdot 997\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} \cdot 60\,\mathrm{m}) 60\,\mathrm{m} && (38)\\
&= 24\,\mathrm{MN\,m^{-1}} && (39)
\end{aligned}
$$

(også greit å bruke formler for krefter på plane flater)

For at volumet skal være i statisk likevek må også de vertikale kreftene balansere tyngden av vannet og atmosfæretrykket over volumet.

For å finne volumet kan vi først betrakte volumet mellom y-aksen og den stiplete linjen. For å finne volumet av vannet trekker vi fra volumet av demningen,

$$V = ad^2db - b\int_0^d ay^2dy \tag{40}$$
$$= ad^3b - ba\frac{1}{3}d^3 \tag{41}$$
$$= \frac{2}{3}ad^3b \tag{42}$$

Arealet på overflaten er $A = ad^2b$.

Vi får dermed

$$F = \rho gV + p_aA \tag{43}$$
$$= \rho g\frac{2}{3}ad^3b + p_aad^2b \tag{44}$$
$$= ad^2b\left(\frac{2}{3}\rho gd + p_a\right) \tag{45}$$

Kraft per dybde f_v inn i planet blir

$$f_v = ad^2\left(\frac{2}{3}\rho gd + p_a\right) \tag{46}$$
$$= 0{,}01\,\mathrm{m}^{-1}\cdot(60\,\mathrm{m})^2\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 997\,\mathrm{kg/m^3}\cdot 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}\cdot 60\,\mathrm{m} + 101\times10^3\,\mathrm{Pa}\right) \tag{47}$$
$$= 18\,\mathrm{MN\,m^{-1}} \tag{48}$$

2 Numeriske oppgaver

8. Anta at vi har en pendel med antatt masseløs snor med lengde $l = 10\,\mathrm{m}$ og en punktmasse $m = 1{,}0\,\mathrm{kg}$ i enden. Finn numerisk bevegelsen til pendelen ved hjelp av `solve_ivp` funksjonen fra `scipy.integrate` modulen (Bruk standard løsningsmetode, dvs RK45). Du skal ikk gjøre noen tilnærming for små vinkler. Simuler bevegelsen fra $t = 0\,\mathrm{s}$ til $t = 10\,\mathrm{s}$. La initialbetingelsene være $\theta(0) = 0{,}5\,\mathrm{rad}$ og $\omega(0) = 1{,}0\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

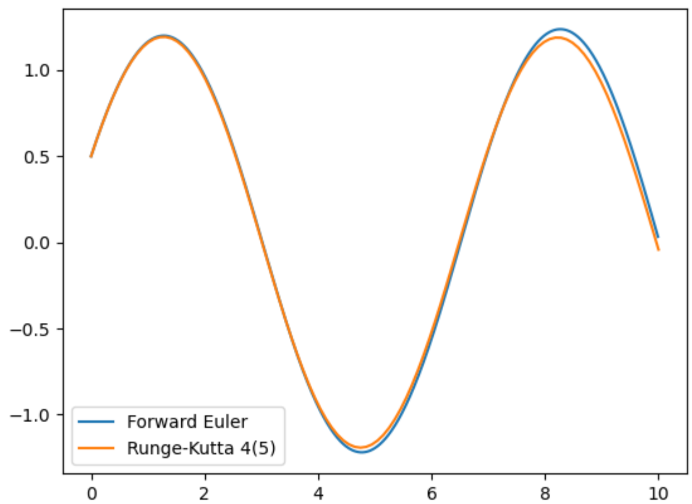
   Lag et plot som viser pendelens vinkelutslag som funksjon av tid.

   Dersom du er usikker på hvordan du løser systemet med `solve_ivp` så kan du isteden bruke Eulers metode (eksplisitt) som du implementerer selv (maksimal uttelling er da 8/10 poeng).

Solution:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```python
from scipy.integrate import solve_ivp

# Simulation of nonlinear pendulum theta'' = -g/l*sin(theta)

# --- Using 4(5)th order Runge-Kutta ---
# x = [theta, omega], where omega = theta'

# Physical parameters
g = 9.81
l = 10
omega2 = g/l

# Simulation parameters
t_span = [0,10]
t_eval = np.linspace(0,10,100) # return solution at denser dt for pretty plot
x_0 = [.5,1] # Inital conditions.

# RHS of first order ODE
def fun(t,x,omega2):
    dtheta = x[1]
    domega = -omega2 * np.sin(x[0])
    return [dtheta, domega]

sol = solve_ivp(fun, t_span, x_0, t_eval=t_eval, args = (omega2,))


# --- Using forward Euler ---

h = 0.01
t = np.arange(t_span[0], t_span[1], h)
N = np.size(t)
theta = np.zeros(N)
omega = np.zeros(N)
theta[0] = x_0[0]
omega[0] = x_0[1]

for i in range(0,N-1):
    theta[i+1] = theta[i] + omega[i]*h
    omega[i+1] = omega[i] - omega2*np.sin(theta[i])*h

# Plot solutions
plt.plot(t,theta, label='Forward Euler')
plt.plot(sol.t, sol.y[0,:], label='Runge-Kutta 4(5)')
plt.legend()
plt.show()
```



3 Flervalgsoppgaver

9. Gitt 2D, inkompressibel strømning hvor hastighetspotensialet ϕ er gitt av

$$\phi = xy + x^2 - y^2 \tag{49}$$

Hva er strømingsfunksjonen ψ for dette strømningsfeltet?

A. $\psi = 2xy + \frac{1}{2}(y^2 - x^2) + c$
B. $\psi = xy - 2(x^2 + x^2) + c$
C. $\psi = x^2y^2 - \frac{1}{2}(y^2 + x^2) + c$
D. $\psi = 2xy + 4(y^2 + x^2) + c$
E. $\psi = 4xy - \frac{1}{2}(y^2 + x^2) + c$

Solution: Vi kan finne hastighetsfeltet fra hastighetspotensialet som

$$v_x = \partial_x \phi = y + 2x \tag{50}$$
$$v_y = \partial_y \phi = x - 2y \tag{51}$$

Vi kan så bruke dette til å sette opp uttrykk for strømningsfunksjonen

$$v_x = \partial_y \psi = y + 2x \tag{52}$$
$$v_y = -\partial_x \psi = x - 2y \tag{53}$$

Vi kan så integrere disse differensiallikningene som gir oss

$$\psi = \frac{1}{2}y^2 + 2xy + f(x) \tag{54}$$

$$\psi = -\frac{1}{2}x^2 + 2yx + f(y) \tag{55}$$

Setter vi disse uttrykkene sammen finner vi at

$$\psi = 2xy + \frac{1}{2}(y^2 - x^2) + c \tag{56}$$

10. Anta at en ambulanse som er i ro sender ut en lydbølge med frekvens f_0 og at denne bølgen forplanter seg i luft med en bølgelengde λ_0. Når denne ambulansen kommer kjørende mot deg, hvilket av følgende utsagn er sanne om frekvensen f og bølgelengden λ til *lydbølgen* som kommer mot deg?
    A. $f > f_0$**,** $\lambda < \lambda_0$
    B. $f > f_0$, $\lambda > \lambda_0$
    C. $f < f_0$, $\lambda < \lambda_0$
    D. $f > f_0$, $\lambda = \lambda_0$
    E. $f < f_0$, $\lambda = \lambda_0$

Solution: Når ambulansen kjører mot deg reduseres avstanden mellom bølgetoppene (Doppler-effekten). Ettersom fasehastigheten er konstant øker da frekvensen.

11. Anta at vi har to planbølger (uttrykt på kompleks form), $y_1 = Ae^{-i\omega t}e^{ik(x+a)}$ og $y_2 = Ae^{-i\omega t}e^{ik(x+b)}$ som propagerer langs x-aksen. Hva blir amplituden A' til den totale bølgen?
    A. $A' = A\sqrt{2[1 + \cos(k(a - b))]}$
    B. $A' = 2A\sqrt{[1 + \cos(k(a + b))]}$
    C. $A' = A\sqrt{2[1 + \cos(2k(a - b))]}$
    D. $A' = A\sqrt{2[1 + \cos\left(\frac{k}{2}(a + b)\right)]}$
    E. $A' = A\sqrt{[1 + \cos(4k(a + b))]}$

Solution: Den totale bølgen y' kan skrives som

$$y' = (Ae^{ika} + Ae^{ikb})e^{i(kx-\omega t)} \tag{57}$$

Vi finner amplituden kvadrert fra $(A')^2 = |y'|^2 = y\bar{y}$, hvor $\bar{y}$ er den komplekskonjugerte av y. Faktoren $e^{i(kx-\omega t)}$ kanslerer når vi multipliserer med den komplekskonjugerte slik at

$$(A')^2 = A^2(e^{ika} + e^{ikb})(e^{-ika} + e^{-ikb}) \tag{58}$$

$$= A^2(2 + 2\cos(k(a - b))) \tag{59}$$

og

$$A' = A\sqrt{2[1 + \cos(k(a - b))]} \tag{60}$$

12. Hvilket av følgende utsagn er sant?
    A. En longitudinal bølge kan være sirkulærpolarisert.
    B. En transversal bølge er alltid lineært polarisert.
    C. En sirkulær polarisert bølge kan dekomponeres i ortogonalt polariserte bølger med samme fasevinkel.
    D. I en longitudinal planbølge i luft varier polarisasjonen langs forplantningsretningen.
    E. En elliptisk polarisert bølge kan dekomponeres i to ortogonal bølger med ulik fasevinkel.

Solution:

- A Longitudinale bølger er ikke polarisert.
- B Transversale bølger kan også være elliptisk polarisert.
- C For at en bølge skal være sirkulært polarisert må de ortogonale komponentene ha fasevinkel med en differanse på $\pi/2$.
- D Longitudinale bølger er fortsatt ikke polarisert.
- E Dette er riktig.

13. En longitudinal bølge transmitteres fra et fast stoff til en gass. Hvilket av utsagnene er typisk sant for hva som skjer når bølgen transmitteres?
    A. Frekvensen øker og fasehastigheten er lik.
    B. Amplituden øker og frekvensen minker.
    C. Fasehastigheten øker og frekvensen er lik.
    D. Frekvensen er lik og amplituden minker.
    E. Fasehastigheten minker og amplituden øker.

Solution: Frekvensen til bølgene må være lik for å oppfylle grensebetingelsene.

Bølgeimpedansen for et materiale kan skrives som

$$Z = \frac{B}{v} = \sqrt{B\rho} \tag{61}$$

Et fast stoff vil typisk ha mye høyere massetetthet enn en gass og en høyere bulkmodul (stivere) enn en gass. Et fast stoff har derfor typisk høyere bølgeimpedans enn en gass.

Amplituden for en transmittert bølge til et materiale med lavere bølgeimpedans vil være høyere enn for den innkommende bølgen.

Fasehastigheten for faste stoffer er høyere enn for gasser.