Utsatt eksamen
TFY4163 2023

1 Regneoppgaver

1. Anta at vi har transversale bølger på en snor. Snoren har massetetthet per lengde μ og er spent opp med en snorkraft S. Vi antar videre at amplituden er mye mindre enn bølgelengden. Vi lar x-aksen være langs snoren og utslaget være uttrykt som $y(x,t)$. For alle deloppgavene, være nøye med å presisere antagelser.

(a) Vis at kinetisk energi per lengde ϵ_k er gitt av,

$$\epsilon_k = \frac{1}{2}\mu(\partial_t y)^2 \tag{1}$$

Solution: Vi ser på et liten del Δx av snoren med masse $\Delta m = \mu\Delta x$. Hastigheten til elementet er $v = \partial_t y$. Den kinetiske energien E_k til elementet blir da

$$E_k = \frac{1}{2}\Delta m v^2 = \frac{1}{2}\mu\Delta x(\partial_t y)^2 \tag{2}$$

Vi får kinetisk energi per lengde ved å dele på lengden

$$\epsilon_k = \frac{E_k}{\Delta x} = \frac{1}{2}\mu(\partial_t y)^2 \tag{3}$$

(b) Vis at potensiell energi per lengde ϵ_p er gitt av

$$\epsilon_p = \frac{1}{2}S(\partial_x y)^2 \tag{4}$$

Solution: Endring av potensiell energi for et objekt er gitt av arbeidet utført på objektet. Arbeid er produktet av kraft og forflytning.
Et elementet som ved likevekt har lengde Δx, vil strekkes til en lengde $\Delta z = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, hvor $\Delta y = \partial_x y \Delta x$. Vi kan da skrive

$$\Delta z = \Delta x\sqrt{1 + (\partial_x y)^2} \approx \Delta x\left(1 + \frac{1}{2}(\partial_x y)^2\right) \tag{5}$$

Ettersom vi har antatt at helningen er liten (bølgelengde mye mindre enn amplitude), antar vi at kraften er konstant og tilnærmet lik snorkraften S og parallel med forflytningen. Vi får da at endringen i potensiell energi blir kraft ganger endring i lengde

$$E_p = S(\Delta x \left(1 + \frac{1}{2}(\partial_x y)^2\right) - \Delta x) \tag{6}$$
$$= S\Delta x \frac{1}{2}(\partial_x y)^2 \tag{7}$$

Vi får potensiell energi per lengde ved å dele på lengden

$$\epsilon_p = S\frac{1}{2}(\partial_x y)^2 \tag{8}$$

(c) Vis at for all tidspunkt så har vi

$$\epsilon_k = \epsilon_p \tag{9}$$

Solution: Bølger hvor amplituden er mye mindre en bølgelengden beskrives av den lineære bølgeligningen

$$\partial_t^2 y = v^2 \partial_x^2 y \tag{10}$$

hvor $v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$.

Den generelle løsningen på bølgelikningen er $y = f(x \pm vt)$, hvor f er en vilkårlig (kontinuerlig og deriverbar) funksjon. Vi får dermed at

$$\partial_t y = \pm v \partial_x y \tag{11}$$

og at

$$(\partial_t y)^2 = v^2 (\partial_x y)^2 = \frac{S}{\mu}(\partial_x y)^2 \tag{12}$$

Vi ser dermed at uttrykkene for potensiell og kinetisk energi per lengde er like.

2. Figur 1 viser (over)trykket for en periodisk, plan lydbølge som funksjon av posisjon x ved tiden $t = 0$. Bølgen beveger seg i positiv x-retning. Vi antar at bølgehastigheten er $v = 344\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. La bulkmodulen for luft være $B = 1{,}42 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$.

(a) Tegn en skisse av trykket som funksjon av t ved posisjon $x = 0$. Marker verdier både langs tids- og trykkaksen. Hva er perioden til bølgen?

Solution: Vi antar at bølgen er beskrevet av den linære bølgelikningen slik at en generell løsning kan skrives som

$$p = g(x - vt) \tag{13}$$

Vi ser at for $t = 0$ er g symmetrisk om y-aksen. Altså $g(x) = g(-x)$. For $x = 0$ har vi dermed $g(-vt) = g(vt)$. Trykket som funksjon av tid får dermed samme form om vi transformerer x-axsen med $x = vt$.

Perioden blir

$$T = \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{v} = \frac{20\,\mathrm{cm}}{344\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 5{,}8 \times 10^{-4}\,\mathrm{s} \tag{14}$$

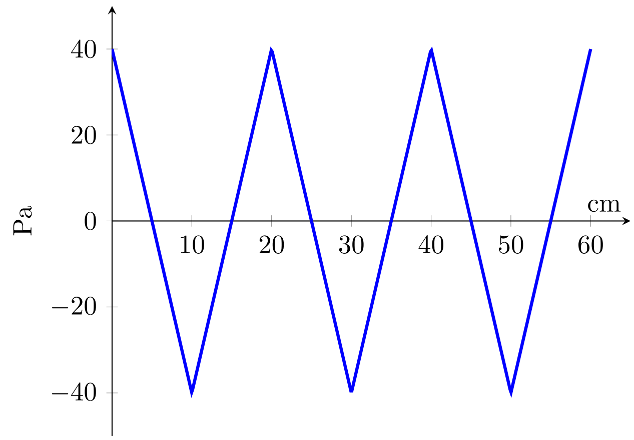
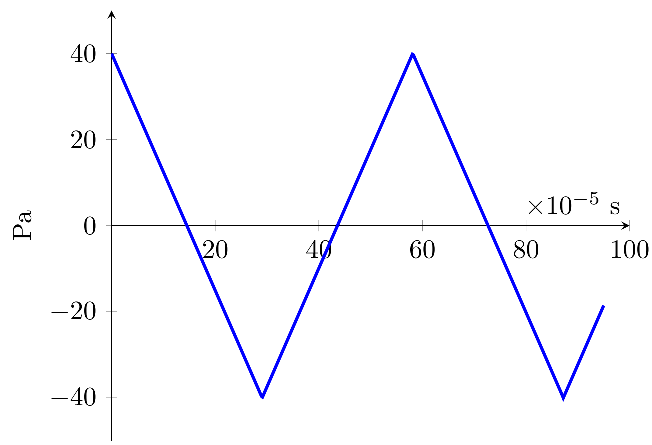


Figure 1: Trykk som funksjon av posisjon ved tiden $t = 0$.



(b) Tegn en skisse av forskyvningen $\xi(x,t)$ som funksjon av x ved tiden $t = 0$. La $\xi(0,0) = 0$ Marker verdier både langs forskyvnings- og posisjonsaksen. Hva er amplituden til forskyvningen?

Solution: For en plan lydbølge er trykket relatert til forskyvningen via

$$p = -B\partial_x \xi \tag{15}$$

Vi ser først på den første halvperioden hvor trykket kan uttrykkes som

$$p(x) = p_0(1 - \frac{4x}{\lambda}) \tag{16}$$

Får å finne et uttrykk for $\xi(x,0)$ integrere vi likningen 16 fra 0 til x,

$$\int_0^x p \, \mathrm{d}x = -\int B\partial_x \xi \, \mathrm{d}x \tag{17}$$

Vi får da

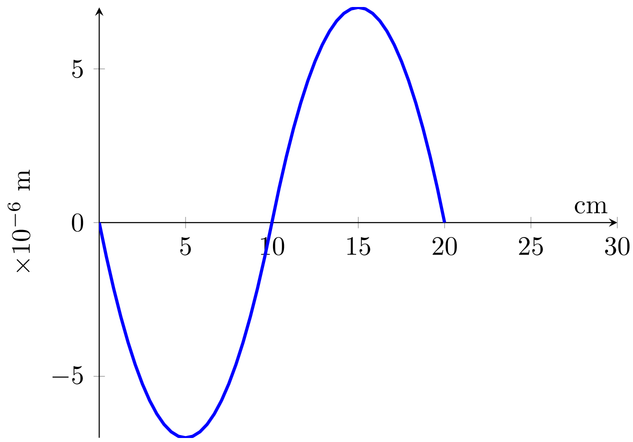
$$B(\xi(x) - \xi(0)) = -p_0 \left(x - \frac{4x^2}{2\lambda} \right) \Big|_0^x = -p_0 \left(x - \frac{2x^2}{\lambda} \right) \tag{18}$$

Skriver om litt for å et uttrykk for forskyvningen,

$$\xi(x) = \frac{p_0}{B}\left(\frac{2x^2}{\lambda} - x\right) \tag{19}$$

Vi ser at forskyvningen følger en parabolsk funksjon. Den andre halvbølgen vil få samme form, kun med motsatt fortegen. Vi har maksimal forskyvning ved $x = \lambda/4$ slik at amplituden ξ_0 blir

$$\xi_0 = -\frac{p_0\lambda}{8B} = 7{,}0 \times 10^{-6}\,\mathrm{m} \tag{20}$$



(c) Hva er den maksimale partikkelhastigheten?

Solution: Vi har forskyvningen som funksjon av x og uttrykket for bølgen som forplanter seg finner vi ved å gjøre transformasjonen $x \to \mathbb{X} = x - vt$,

$$\xi(\mathbb{X}) = \frac{p_0}{B}\left(\frac{2\mathbb{X}^2}{\lambda} - \mathbb{X}\right) \tag{21}$$

For å finne partikkelhastigheten partiellderiverer vi forskyvningen med hensyn på tid og får

$$v_p = \partial_t \xi = \frac{p_0 v}{B}\left(1 - \frac{4(x - vt)}{\lambda}\right) \tag{22}$$

Siden vi bare har sett på første halvbølge er dette uttrykket gyldig for $0 < x - vt < \lambda/2$. Vi får størst hastighet når siste leddet i parentesen er 0 eller $\lambda/2$. Maksimal partikkelhastighet blir da

$$\frac{p_0 v}{B} = \frac{40\,\mathrm{Pa}344\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{1{,}42 \times 10^5\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 9{,}7 \times 10^{-2}\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{23}$$

3. Gitt stasjonær strømning, diskuter sammenhengen mellom uttrykkene for massebevaring i *kompressible* fluider (integral- og differensialform) og divergensteoremet (Gauss' teorem).

Solution: Massebevaring for kompressible fluider på differensialform ved stasjonær strømning er

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \tag{24}$$

Men massebevaring kan også uttrykkes på integralform (for stasjonær strømning) som

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, \mathrm{d}A = 0 \tag{25}$$

hvor $\rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, \mathrm{d}A$ er massefluksen, altså at for stasjonær strømning vil massen omsluttet av arealet være uendret (netto strømning lik 0).
Divergensteoremet sier at

$$\int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{f} \, \mathrm{d}V = \oint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, \mathrm{d}A \tag{26}$$

Vi kan dermed skrive om massebevaring på integralform som

$$\oint_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, \mathrm{d}A = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \rho \mathbf{v} \, \mathrm{d}V = 0 \tag{27}$$

Siden det siste integralet må gjelde for et vilkårlig volum må integranden også være null og vi får

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \tag{28}$$

som er massebevaring på integralform. Divergensteoremet knytter altså massebevaring på integralform til massebevaring på differensialform.

4. Gitt det inkompressible strømningsfeltet

$$\mathbf{v} = (axy + b)\hat{\mathbf{x}} - \left(\frac{1}{2}ay^2 + c\right)\hat{\mathbf{y}} \tag{29}$$

hvor a, b og c er konstanter. Dersom det er mulig, finn hastighetspotensialet for dette strømningsfeltet. Hvis ikke, forklar hvorfor det ikke er mulig.

Solution: For alle skalarfelt ϕ så gjelder at curl av en gradient er identisk lik null.

$$\nabla \times \nabla \phi = 0 \tag{30}$$

Dersom vi har et hastighetsfelt med virvling lik null (rotasjonsfritt)

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \tag{31}$$

Så indikerer det at vi kan skrive hastighetsfeltet som gradienten til et skalarfelt ϕ som vi kaller hastighetspotensialet.

$$\mathbf{v} = \nabla \phi \tag{32}$$

Får å finne dette må vi dermed første sjekke om hastighetspotensialet er rotasjonsfritt.

$$\nabla \times \mathbf{v} = \hat{\mathbf{z}}(\partial_x v_y - \partial_y v_x) = \hat{\mathbf{z}}\,(0 - ax) \tag{33}$$

Dette uttrykket er ikke lik null for vilkårlig x og y, systemet er dermed ikke rotasjonsfritt, og man kan ikke definere et hastighetspotensial.

5. Vis at den materialderiverte a massetettheten $\rho(x,t)$ er gitt av

$$D_t\rho = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) \tag{34}$$

Anta at vi har en strømning med positiv divergens av hastighetsfeltet i et vilkårlig punkt. Basert på uttrykket over, hva kan man da si om hvordan volumet til et fluidelement som passerer gjennom dette punktet endres?

(hint: Kanskje du kan bruke kontinuitetslikningen? Merk at væsken kan være kompressibel. Kanskje du trenger identiten $\nabla \cdot (f\mathbf{g}) = f\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{g}\nabla f$.)

Solution: Den materialderiverte av tettheten blir

$$D_t\rho = \partial_t\rho + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\rho = \partial_t\rho + (v_x\partial_x + v_y\partial_y + v_z\partial_z)\rho = \partial_t\rho + \mathbf{v}\cdot\nabla\rho \tag{35}$$

Vi bruker så den oppgitte identiteten og får

$$D_t\rho = \partial_t\rho + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) - \rho\nabla\cdot\mathbf{v} \tag{36}$$

Det første og andre leddet på høyre side er lik null fra kontinuitetslikningen og vi får dermed,

$$D_t\rho = -\rho\nabla\cdot\mathbf{v} \tag{37}$$

som var det vi skulle vise.

Den materialderiverte av en feltstørrelse gir oss hvordan størrelsen endrer seg når vi følger et materialelement/partikkel. Dersom divergensen er positiv ser vi at massetettheten til partikkelen minker, altså at volumet øker (massen endrer seg ikke siden vi ser på at bestemt materialelement).

2 Numeriske oppgaver

6. Vi skal simuler bevegelsen til en harmonisk oscillator ved hjelp av Eulers metode (eksplisitt/forward Euler).

Bevegelseslikningen for en harmonisk oscillator er

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x(t) \tag{38}$$

Men vi skal nå se på en "matematisk" (dimensjonsløs) variant av denne ligningen:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -bx(t) \tag{39}$$

hvor vi antar at alle variablene og parameteren b er dimensjonsløse (ingen benevning).

Løs denne likningen numerisk ved hjelp av Eulers metode (eksplisitt/forward Euler). Denne numerisk metoden er ikke stabil (global feil øker raskt) og dersom tidstegene er for store vil vi få en rask (ufysisk) økning i amplituden. La en $\epsilon = x_m - x_0$ være en parameter som beskriver endringen i amplitude hvor x_m er maksimalverdien av absoluttverdien av utslaget i hele domenet (Python funksjoner `max`, `abs`) og x_0 er initialverdien.

Kjør simuleringen fra $t = 0$ til $t = 1$. Del opp tidsintervallet i N steg slik at vært tidssteg blir $h = 1/N$. La $x(0) = 1$, og $\dot{x}(0) = 0$.

Se på minst tre ulike verdier av b fordelt mellom 200 og 5000. For hver av b-verdiene, finn N slik at $0.09 < \epsilon < 0.10$. Lag en tabell som viser b/N for de ulike b-verdiene (du kan prøve å starte med en $N \approx 5b$).

Solution:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T = 1
N = 7500
b = 1500

x = np.zeros(N)
y = np.zeros(N)
t = np.linspace(0,T,N)

x[0] = 1

h = T/N

for i in range(N-1):
    x[i+1] = x[i] + y[i]*h
    y[i+1] = y[i] - b*h*x[i]

dx = max(abs(x))-x[0]
print(f'{dx:.3e}')

plt.plot(t,x)
plt.show()
```

b	N	b/n
5000	25800	0.194
1500	7700	0.195
500	2600	0.192

3 Flervaglsoppgaver

7. En sfærisk vanndråpe i luft har radius 1,0 mm. Overflatespenningen til vann mot luft er 0,073 N/m. Hva er trykkforskjellen mellom det indre av dråpen og omgivelsene?

A. 12 Pa B. 68 Pa C. 0,11 kPa **D.** 0,15 kPa E. 0,21 kPa

Solution: Vi har generelt at

$$\Delta p = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \tag{40}$$

For en sfære er begge radiene like slik at vi får

$$\Delta p = \frac{2\gamma}{R} = \frac{2 \cdot 0{,}073\,\mathrm{N\,m^{-1}}}{1\,\mathrm{mm}} = 146\,\mathrm{Pa} \tag{41}$$

8. Hvilke betingelser *må* være oppfylt for at følgende likning skal være gyldig?

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{42}$$

   A. Friksjonsfritt og inkompressibelt
   B. Rotasjonsfritt
   C. Friksjonsfritt og stasjonært
   D. Inkompressibelt
   E. Stasjonært og inkompressibelt

9. To bølger med små amplituder beveger seg på en havoverflate. Slike bølger er dispersive. Hvilke (du kan velge flere) av følgende utsagn er *ikke sanne* om de to bølgene.
   A. De kan ha ulik amplitude.
   B. De kan ha ulike bølgelengde.
   C. De kan ha ulik frekvens
   D. De kan ha ulik fasehastighet
   E. De kan ha samme frekvens men ulik bølgelengde

Solution: For dispersive bølger er fasehastigheten en funksjon av bølgelengden til bølgen. For havbølger gjelder dispersjonsrelasjon

$$\omega^2 = gk \tanh kh \tag{43}$$

hvor h er havdybden.

Bølgehastigheten $v = \omega/k$ vil dermed variere med bølgelengde. Men det er fortsatt en fast relasjon mellom bølgelengde og frekvens (gitt av dispersjonsrelasjonen).

Det er forøvrig ingen begrensninger på hvilken amplitude (bortsett fra at approksimasjon for små bølger må være gyldig), bølgelengde eller frekvens de to bølgene kan ha.

10. Et tog har en fløyte som sender ut en lydbølge på 400 Hz når toget er i ro. Hva blir bølgelengden på lydbølgen som sendes ut foran toget dersom toget beveger seg i $25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. La lydhastigheten være $344\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
   A. 0,75 m
   B. 0,80 m
   C. 0,85 m
   D. 0,90 m
   E. 0,95 m

Solution: Vi kan ta utgangspunkt i uttrykket for den mottatte frekvens f' for en stasjonær mottager foran toget,

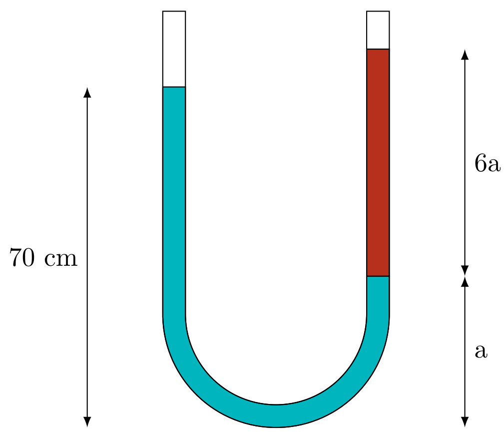
$$f' = f\frac{v}{v - v_s} \tag{44}$$

Bølgelengden er relatert til frekvensen via $v = \lambda f$, slik at vi får

$$\lambda = \frac{v}{f'} = \frac{v - v_s}{f} = \frac{344\,\mathrm{m\,s^{-1}} - 25\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{400\,\mathrm{Hz}} = 0{,}80\,\mathrm{m} \tag{45}$$

11. I et buet rør som vist i figuren er det helt vann ($\rho_w = 997\,\mathrm{kg/m^3}$) og olje ($\rho_o = 790\,\mathrm{kg/m^3}$). Røret er åpent mot atmosfæren i begge ender. Væskene fordeler seg slik at høyden på vannsøylen på den ene siden er $L = 70$ cm, mens på den andre siden er høyden på oljen seks ganger så høy som vannet (se figur).

    Hvor høy er væskesøylen totalt på siden med olje og vann?



    A. 75 cm
    B. 80 cm
    C. 85 cm
    D. 90 cm
    E. 95 cm

Solution: Trykket i et horisonalt plan må være konstant slik at vi kan skrive

$$p_a + \rho_w g(L - a) = \rho + \rho_o g 6a \tag{46}$$

Løser vi får a får vi

$$a = \frac{\rho_w L}{6\rho_o + \rho_w} = 12{,}2\,\mathrm{cm} \tag{47}$$

Den totale høyden er $7a = 85\,\mathrm{cm}$