TFY4163. Eksamen. Mai 2024

Regneoppgaver

Bølgefysikk

1. (a) Vis at gjennomsnittlig effekt som overføres med en harmonisk bølge kan uttrykkes som

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{S\mu}\,\omega^2 y_0^2 \tag{1}$$

Solution: Effekt er gitt av kraft ganger (partikkel)hastighet $P = Fv_p$. På en streng er kraften gitt av $S\partial_x y$, mens partikelhastigheten er $v_p = \partial_t y$ slik at

$$P = -S\partial_x y \partial_t y \tag{2}$$

Setter vi inn for en harmonisk bølge $y = y_0 \cos(kx - \omega t)$ får vi

$$P = Sk\omega(y_0 \sin(kx - \omega t))^2 \tag{3}$$

Tar vi gjennomsnittlig effekt får vi

$$P = \frac{1}{2}Sk\omega y_0^2 \tag{4}$$

Vi kjenner ikke bølgetallet k så bruker at $k = \omega/v = \omega/\sqrt{S/\mu} = \omega\sqrt{\mu/S}$
som gir oss

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{S\mu}\,\omega^2 y_0^2 \tag{5}$$

(b) En pianostreng har en masse på 3,0 g og lengde 80 cm. Strengen er spent opp med en kraft på 25 N. En bølge med frekvens 120 Hz beveger seg langs strengen med en amplitude på 1,6 mm. Hvor stor gjennomsnittlig effekt overføres med bølgen?

Solution:

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{25\,\mathrm{N}\frac{3\times 10^{-3}\,\mathrm{kg}}{0{,}8\,\mathrm{m}}}(2\pi \cdot 120\,\mathrm{Hz} \cdot 1{,}6\times 10^{-3}\,\mathrm{m})^2 = 0{,}22\,\mathrm{W} \tag{6}$$

2. Anta at vi har stående bølger på en streng. Det er 15 cm mellom knutepunktene (punkter på strengen som ikke beveger seg). Alle delene på strengen (bortsett fra knutepunktene) svinger med en periode $T = 0{,}075$ s. Hva er bølgehastigheten til bølger på strengen?

Solution: Bølgelengden er to ganger avstanden mellom knutepunktene, $\lambda = 30$ cm. Frekvensen til bølgene er $f = 1/T$. Vi kan dermed finne bølgehastigheten via $v = \lambda f = \lambda/T$

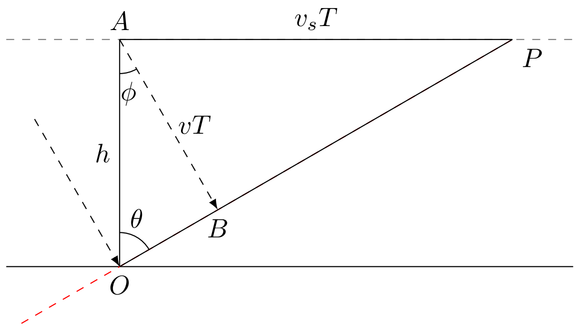
$$v = \lambda/T = 30\,\mathrm{cm}/0{,}075\,\mathrm{s} = 4{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{7}$$

3. Et jagerfly flyr over deg i en høyde h. Du hører sjokkbølgen fra jagerflyet en tid T etter at jagerflyet passerer rett over deg. Anta at lydhastigheten er v. Vis at jagerflyets hastighet v_s kan uttrykkes som

$$v_s = \frac{hv}{\sqrt{h^2 - (vT)^2}} \tag{8}$$

Solution: Fronten på sjokkbølgen beveger seg med lydhastigheten v så avstanden fra fronten sjokkbølgen til punktet hvor lydbølgen ble dannet er vt, hvor t er tiden siden lydbølgen ble sendt ut.

Vi kan dermed tegne opp diagrammet som vist i figuren. Merk at lydbølgen som treffer deg T etter at flyet var rett over deg, ble sendt ut *før* flyet var rett over deg.



Trekantene OAB og OAP er formlike. Vi kan dermed skrive

$$\tan\phi = \frac{OB}{vT} = \frac{h}{v_sT} \tag{9}$$

Løser vi dette for v_s får vi

$$v_s = \frac{vh}{OB} \tag{10}$$

Vi har i tillegg

$$h^2 = (vT)^2 + (OB)^2 \tag{11}$$

Vi løser denne for OB og setter inn i forrige likning som gir oss

$$v_s = \frac{vh}{\sqrt{h^2 - (vT)^2}} \tag{12}$$

Fluidmekanikk

4. Vis hvordan antagelsene om inkompressibilitet og rotasjonsfrihet og gir opphav til konseptet *strømningsfunksjon* og at denne oppfyller Laplace-likningen.

Solution: Kontinuitetslikningen for inkompressible materialer i to dimensjoner er

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \partial_x v_x + \partial_y v_y = 0$$

Vi ser at en funksjon $\psi(x, y)$ vil oppfylle kontinuitetslikningen automatisk hvis $v_x = \partial_y \psi$ og $v_y = -\partial_x \psi$.

Hvis vi i tillegg antar at vi har rotasjonsfri strømning får vi i to dimensjoner

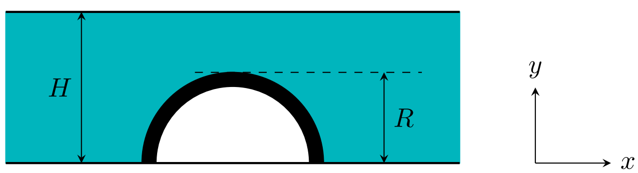
$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \partial_x v_y - \partial_y v_x = 0$$

Setter vi inn uttrykkene for strømningsfunksjonen får vi Laplaces likning

$$\partial_x^2 \psi + \partial_y^2 \psi = \nabla^2 \psi = 0$$

Vi kan dermed finne strømingsfunksjonen ved å løse Laplaces likning og når vi har strømningsfunksjonen så kan vi finne hastighestfeltet ved enkel derivasjon som i uttrykkene over. Utfordringen er å finne en strømningsfunksjon som oppfyller systemets grensebetingelser.

5. Det skal bygges en tunnel under en grunn kanal med dybde H som vist i figuren. Tunnelens tverrsnitt er formet som en halvsirkel med radius R. Massetettheten til vannet er ρ og tyngdens akselerasjon er g. Finn et uttrykk for total kraft per lengde (inn i planet) som virker på overflaten av tunnelen fra vannet, uttrykt ved de oppgitte variablene (se bort fra atmosfæretrykket ettersom bidraget blir kansellert av atmosfæretrykket på innsiden av tunnelen).



Solution: Vi ser på arealet til et lite buesegment $\mathrm{d}A = \mathrm{d}b\, w$ hvor w er dybden inn i planet. Buelengden kan vi uttrykke som $\mathrm{d}b = R\,\mathrm{d}\theta$. Kraften på dette elementet er gitt av trykket multiplisert med arealet. Trykket p er gitt av $p = \rho g(H - y) = \rho g(H - R\sin\theta)$, hvor y er lengden fra bunnen til elementet vi ser på.

Fra symmetrien i systemet kan vi se at alle kreftene i x-rentning vil kanselere hverandre. Vi trenger derfor kunne å betrakte kraften y-retning, $\mathrm{d}F_y = \mathrm{d}F \sin\theta$.

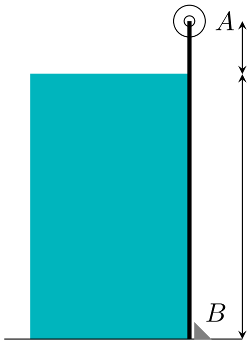
Vi integrerer opp kreftene over hele halvsirkelen

$$\begin{aligned} F &= \int_0^\pi p\,\mathrm{d}A = \int_0^\pi \rho g(H - R\sin\theta)\sin\theta w R\,\mathrm{d}\theta \\ &= wR\rho g H \int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta - wR^2\rho g \int_0^\pi \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= wR\rho g H 2 - wR^2\pi/2 \\ &= 2wR\rho g\left(H - \frac{\pi R}{4}\right) \end{aligned}$$

Kraft per lengde inn i planet blir da

$$f = F/w = 2R\rho g\left(H - \frac{\pi R}{4}\right)$$

(En annen fremgangsmåte kunne være å regne ut volumet av vannet over tunnelen)

6. 

Figuren viser en port mellom punktene A og B som holder på plass vannet til venstre i en demning. Portene kan rotere fritt rundt en akse gjennom punktet A gjennom planet. En liten kloss ved B hindrer porten fra å åpne seg.

Demingen har en bredde inn i planet på $b = 5{,}0\,\mathrm{m}$. Høydene på vannet mot demningen er $h = 5{,}0\,\mathrm{m}$, mens avstanden fra vannet til rotasjonspunktet A er $k = 1{,}0\,\mathrm{m}$.

Hvor stor kraft må virke fra klossen B på porten for at porten ikke skal åpne seg?

Solution: For at porten skal være i ro må dreiemomentene og kreftene være balansert.

For alle punkter på porten vil trykket fra atmosfærene balanseres slik at vi kan se bort fra dette i uttrykket for trykket.

Dreiemomentet fra vannet på porten kan uttrykkes som

$$\tau_w = r_w F_w$$

hvor r_w er avstanden fra A til trykksenteret og F_w er netto kraft som virker fra vannet på porten.

Posisjonen til trykksenteret relativt til centroiden, $z_{cg} = h/2$ er gitt av

$$z_{CP} = -\frac{\gamma I_{xx}}{p_{CG} A}$$

Minustegnet viser at trykkesenteret er dypere enn centroiden. Regner vi ut det andre areal moment i forhold til CG finner vi at

$$I_{xx} = \frac{bh^3}{12}$$

som gir

$$z_{CP} = h/6$$

Vi finner dermed r_w som

$$r_w = k + h/2 + h/6 = 4{,}3\,\mathrm{m}$$

Netto kraft er

$$F = p_{CG}A = \rho g \frac{h}{2} hb = 6{,}1 \times 10^5\,\mathrm{N}$$

Kraftarmen til klossen r_b er

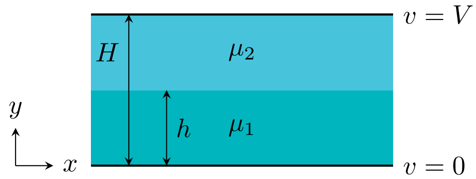
$r_b = k + h = 6\,\mathrm{m}$

Vi får dermed for å balansere dreiemomentene,

$$F_b = \frac{r_w F_w}{r_b} = 4{,}4 \times 10^5\,\mathrm{N}$$

(differansen mellom de to kreftene tas opp av en kraft som virker fra omdreiningspunktet på porten).

7. Anta vi har et strømningssystem som vist i figuren. Den øverste platen beveger seg med hastighet V mens den nederste platen er i ro. Mellom platene er det to adskilte, ikke-blandbare, fluider med ulik viskositet. Vi ser bort fra gravitasjon og antar at det ikke er noen trykkgradienter i systemet. Vi antar stasjonær strømning og at hastighetsfeltet kun har komponenter i x-retning, $u_1(y)$ og $u_2(y)$ og kun varierer i y-retning. Avstanden fra den nederste flaten til grensesjiktet er h. Avstanden mellom platene er H.



(a) I grensesjiktet mellom de to flatene er grensebetingelsen

$$\mu_1 \partial_y u_1(h) = \mu_2 \partial_y u_2(h)$$

Gi et fysisk argument for hvorfor denne grensebetingelsen må gjelde for dette systemet.

Solution: Vi kan se på et lite fluidelement sentrert på grenseflaten. ved den øvre flaten vil den viskøse spenningen være $\mu_2 \partial_y u_2$ mens ved den nedre flaten vil spenningen være $\mu_1 \partial_y u_1$. Disse kreftene virker i x-retning. Ettersom vi har stasjonære forhold og hastigheten ikke varierer i x-retning må disse kreftene være balansert, dermed følger grensebetingelsen.

(b) I tillegg til grensebetingelsen gitt over gjelder også heftbetingelsen både i grensesjiktet og ved de to platene. Finn et uttrykk for $u_1(y)$ og $u_2(y)$ i de to lagene.

Solution: For dette systemet forenkles NS til

$$\partial_y^2 u(y) = 0$$

Den generelle løsningen er

$$u(y) = ay + b$$

For det nederste fluidet må $u(0) = 0$ slik at b = 0. Vi får da foreløpig løsning for de to lagene,

$$u_1 = a_1 y \tag{13}$$
$$u_2 = a_2 y + b_2 \tag{14}$$

Ved grenseflaten mellom fluidene må vi ha

$$\mu_1 \partial_y u_1 = \mu_1 \partial_y u_1$$

som gir

$$\mu_1 a_1 = \mu_2 a_2$$

I tillegg må hastighetsfeltet være kontinuerlig ved grenseflaten (heftbetingelse)

$$a_1 h = a_2 h + b_2$$

Ved den øverste flaten har vi

$$a_2 H + b_2 = V$$

Vi har dermed tre likninger som vi kan løse for de tre ukjente. Vi finner

$$a_1 = \frac{\mu_2 v}{h\mu_2 + (H-h)\mu_1}$$

$$a_2 = \frac{v}{h(\mu_2/\mu_1 - 1) + H}$$

$$b_2 = v\left(1 - \frac{H}{h(\mu_2/\mu_1 - 1) + H}\right)$$

Flervalgsoppgaver

Bølgefysikk

8. Figuren viser forskyvningen til en transversal bølge ved et gitt tidspunkt. Bølgen beveger seg i positiv x-retning. Hvilken av uttrykkene nedenfor kan beskrive hastighete til en partikkel i punkt B ved dette tidspunktet. Vi antar $\alpha > 0$ og $\beta > 0$.

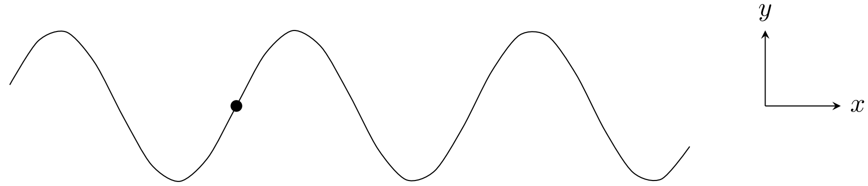
   A. $\boldsymbol{v_B} = -\alpha\hat{\boldsymbol{x}}$

   B. $\boldsymbol{v_B} = -\alpha\hat{\boldsymbol{x}} - \beta\hat{\boldsymbol{y}}$

   C. $\boldsymbol{v_B} = -\beta\hat{\boldsymbol{y}}$

   D. $\boldsymbol{v_B} = \alpha\hat{\boldsymbol{x}} + \beta\hat{\boldsymbol{y}}$

   E. $\boldsymbol{v_B} = \beta\hat{\boldsymbol{y}}$



Solution:
Forskyvningen til bølgen beskrives av

$$y(x,t) = A\sin\left(kx - \omega t\right)$$

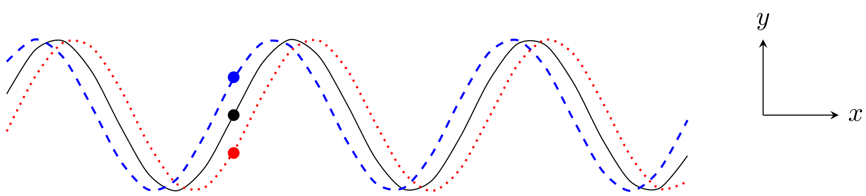
Hvis vi ser på en konkret partikkel i et punkt x blir bevegelsen

$$y(t) = A\sin\left(kx - \omega t\right)$$

som bare er en vertikal bevegelse. Figuren viser bølgen like før (blå) og etter (rød) og vi ser at partikkelen beveger seg nedover slik at partikkelhastigheten må beskrives som

$$\boldsymbol{v_B} = -\beta\hat{\boldsymbol{y}}$$

for $\beta > 0$



9. En bølge med amplitude A beveger seg med hastighet $v = 0{,}20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ langs en streng med massetetthet μ som er spent opp med en kraft T. Anta at vi så sender en bølge med amplitude $2A$ (men fortsatt antar at den oppfyller bølgelikningen), øker spenning i strengen til $3T$ og dobbler lengden på strengen, men uten å endre massetettheten. Hva blir bølgehastigheten til den nye bølgen?
   - A. $0{,}16\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
   - B. $0{,}20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
   - C. $0{,}24\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
   - D. $0{,}28\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
   - **E.** $0{,}35\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

Solution: Bølgehastigheten er gitt av

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Det er kun spenningen som endrer seg i dette uttrykket slik at den nye bølgehastigheten blir

$$v = \sqrt{\frac{3T}{\mu}} = \sqrt{3}v = 0{,}35\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

10. Figur 1 viser en bølgepuls som funksjon av x ved tiden $t = 0{,}01\,\mathrm{s}$. Figur 2 viser samme bølge som funksjon av tid ved posisjon $x = 2{,}0\,\mathrm{cm}$.

    Hvilken retninger beveger bølgen seg? Hva er hastigheten til bølgen?
   - A. Positiv x-retning. $v = 1{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

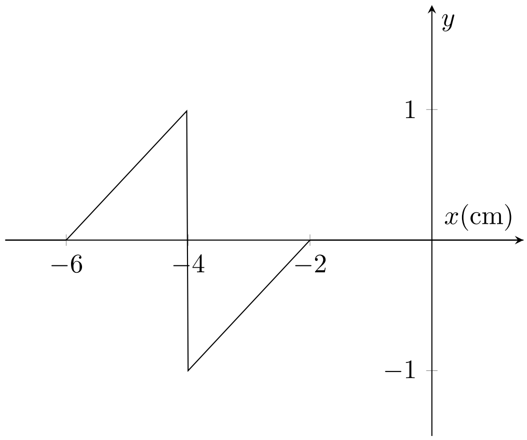
B. Negativ x-retning. $v = 1{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

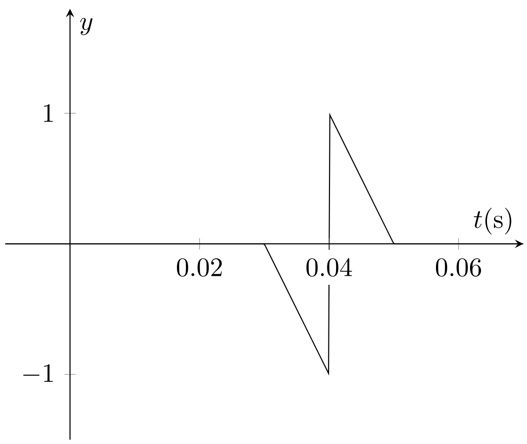
C. Positiv x-retning. $v = 2{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

D. Negativ x-retning. $v = 2{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

E. Positiv x-retning. $v = 4{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

F. Negativ x-retning. $v = 4{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$





Solution: I kurven som viser bølgen ved tiden $t = 0{,}01\,\mathrm{s}$ er bølgetoppen ved $x = -4\,\mathrm{cm}$. Ser vi på den andre figuren med bølgen som funksjon av tid ser vi at toppen er ved $x = 2\,\mathrm{cm}$ ved tidspunktet $t = 0{,}04\,\mathrm{s}$. Vi ser altså at x-posisjon øker med tiden altså beveger bølgen seg i positiv x-retning.

Vi kan finne bølgehastigheten ved å se hvor langt bølgetoppen har beveget seg,

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2\,\mathrm{cm} - (-4\,\mathrm{cm})}{0{,}04\,\mathrm{s} - 0{,}01\,\mathrm{s}} = \frac{6\,\mathrm{cm}}{0{,}03\,\mathrm{s}} = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Fluidmekanikk

11. Gitt et strømningsfelt med hastighet $\boldsymbol{v}$ gitt av

$$\boldsymbol{v} = (ayx^2 + b, cxy^2, dx^2y)$$

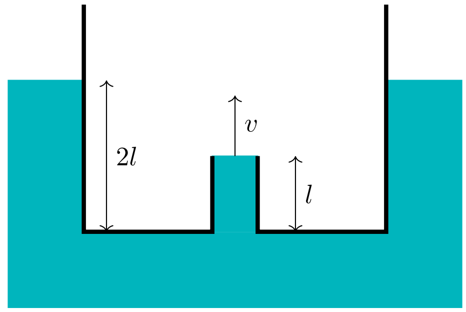


Figure 1: Kar nedsenket i vann med innvendig.

hvor a, b, c og d er konstanter. Hvilket kriterium må oppfylles for at strømningsfeltet kan beskrive et inkompressibelt fluid?

A. $a = 3b$

B. $2c = -d$

C. $a = -c$

D. $b = 2d$

E. $a = -3b$

Solution: For å være kompressibel må kontinuuitetslikningen $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ være oppfylt. Divergensen av hastighetsfeltet gir oss

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = ay2x + 2ycx + 0 = 2yx(a + c) = 0$$

Vi ser dermed at $a = -c$

12. En sfærisk vanndråpe i luft har radius 1,0 mm. Overflatespenningen til vann mot luft er 0,073 N/m. Hva er trykkforskjellen mellom det indre av dråpen og omgivelsene?

A. 12 Pa B. 68 Pa C. 0,11 kPa **D.** 0,15 kPa E. 0,21 kPa

Solution: Vi har generelt at

$$\Delta p = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \tag{15}$$

For en sfære er begge radiene like slik at vi får

$$\Delta p = \frac{2\gamma}{R} = \frac{2 \cdot 0{,}073\,\mathrm{N\,m^{-1}}}{1\,\mathrm{mm}} = 146\,\mathrm{Pa} \tag{16}$$

13. En beholder senkes ned i vann slik at bunnen er $2l$ under overflaten. Figuren viser et tverrsnitt av beholderen. I bunnen av beholderen er et rør med lengde l som vender inn i beholderen. Hva er hastigheten til vannet når det kommer ut av røret (før nivået inni beholderen når toppen av røret). Anta at vi kan se bort fra friksjon. La $l = 20$ cm.

A. 2,0 m/s B. 2,8 m/s C. 3,3 m/s D. 3,7 m/s E. 4,5 m/s

Solution: Bruk Bernoulli's likning. Velg for eksempel en strømlinje som slutter i enden på røret og starter i et punkt i vannet som er tilnærmet i ro i en dybde z. Vi får da,

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p_a}{\rho} - gl = \frac{p_a + \rho g z}{\rho} - gz$$

Som gir

$$v = \sqrt{2gl} = 2{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Numerisk

En dempet harmonisk oscillator kan modelleres av følgende differensiallikning

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

La initisialbetingelsene ved $t = 0\,\mathrm{s}$ være $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = 0$. Simuler bevegelsen til oscilatoren mellom $t = 0\,\mathrm{s}$ og $t = 20\,\mathrm{s}$ med Eulers metode og plot resultatet. Bestem selv en passende steglengde.

La $m = 1{,}0\,\mathrm{kg}$, $k = 1{,}0\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ og $b = 0{,}5\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$