.

NTNU **Institutt for fysikk**

Faglig kontakt under eksamen:
Professor Johan S. Høye
Telefon: 91839082

Eksamen i FY1005 Termisk Fysikk

Fredag 19. desember 2008
09:00–13:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ **C**
Typegodkjent kalkulator.
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Dette oppgavesettet er på 4 sider.

Sensurfrist: 19. januar
(Hver av oppgavene 1, 2 og 3 teller like mye.)

Oppgave 1

a) Det kan vises at differensen mellom de spesifikke varmer ved konstant trykk p og konstant volum V generelt kan uttrykkes som

$$C_p - C_V = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p .$$

Beregn denne differensen for en Van der Waals gass (et mol) som følger tilstandslikningen

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

der a og b er konstanter.

b) Det kan videre vises at en Van der Waals gass har indre energi gitt ved

$$U = C_V T - \frac{a}{V}.$$

når C_V er uavhengig av T og V. En slik Van de Waals gass presses nå gjennom en porøs plugg (Joule-Thomson-effekten). I utgangspunktet er volumet $V = V_0 = 5b$ mens temperaturen er $T = T_0 = a/(2Rb)$. Hva blir sluttemperaturen $T = T_s$ etter at gassen har passert gjennom pluggen når sluttvolumet kan regnes som uendlig stort og $C_V = 3R/2$? [Hint: Benytt at enthalpien er bevart ved denne prosessen.]

Oppgave 2

a) Hva er likevektsbetingelsene på temperatur, trykk og kjemisk potensial for et system i termisk likevekt?

Et rent oppløsningsmiddel befinner seg på begge sider av en membran som det kan trenge gjennom. På den ene sida av denne membranen tilsettes et stoff som ikke kan trenge gjennom denne. Det tilsatte stoffet (som er oppløst) vil da føre til et osmotisk trykk mot membranen. Ved små konsentrasjoner er dette trykket gitt ved

$$\Delta p = \frac{RT}{V} n.$$

Utled dette uttrykket.

b) Kraftverk som kan utnytte det osmotiske trykket mellom ferskvann og saltvann ved utløpet av elver blir vurdert. Anta at pr. tidsenhet strømmer en vannmengde Q (volum/tid) gjennom membranen som skiller ferskvann og saltvann. Denne strømmen fører til et trykktap (friksjon) $\Delta p_t = \lambda Q$ der λ er en konstant. Dette betyr at når strømmen $Q = \Delta p_0/\lambda$ er trykktapet Δp_t lik det osmotiske trykket Δp_0. Men når $Q < \Delta p_0/\lambda$ vil trykkdifferensen $\Delta p = \Delta p_0 - \Delta p_t$ kunne utføre et netto arbeid (f.eks. drive en turbin). Hva blir effekten (arbeid/tid) P til dette arbeidet når en ser bort fra tap forøvrig?

Effekten P vil variere med vannstrømmen Q. Betrakt tilfellet der maksimal effekt er $P = P_m = 85\,\mathrm{kW}$ når det osmotiske trykket er $\Delta p_0 = 2,1 \cdot 10^6\,\mathrm{N/m^2}$ (21 atm). Hva er den tilhørende vannstrømmen $Q = Q_m$ som gir maksimal effekt?

Oppgitt: $\mu_i = \mu_i^0 + kT \ln x_i,$
$dG = -S\,dT + V\,dp.$

Oppgave 3

a) Vis ved innsetting at

$$T = T(r,t) = a\frac{\sin(kr)}{r}\, e^{-Dk^2 t}$$

er en løsning av varmeledningslikningen

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\nabla^2 T \quad \text{der} \quad \nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r \quad \text{med kulesymmetri.}$$

b) En mer vilkårlig kulesymmetrisk løsning er gitt ved

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin(k_n r)}{r} e^{-Dk_n^2 t} + T_\infty.$$

Størrelsene a_n og k_n bestemmes av grensebetingelsene. Hvilke verdier kan k_n ha når en grensebetingelse er at $T(R,t) = T_\infty$?

c) Varmeledningslikningen skal ved siden av grensebetingelsen $T(R,t) = T_\infty$ løses med begynnelsesbetingelsen

$$T(r,0) - T_\infty = T_0 \;\; (= \text{konst}), \quad (\text{for } \; r < R).$$

Koeffisientene a_n kan så bestemmes ved å regne ut integralet

$$a_n = \frac{2}{R}\int_0^R (T(r,0) - T_\infty) r \sin(k_n r)\, dr.$$

Regn så ut koeffisientene a_n, og vis med det at $a_1 = 2RT_0/\pi$ når verdien for k_1 bestemt under punkt b) settes inn. (k_1 er den k_n som har lavest verdi.)

d) For store tider ($\exp(-Dk_1^2 t) \ll 1$) vil leddet med k_1 dominere slik at de øvrige leddene kan neglisieres. Betrakt så avkjøling av en kule der grensebetingelsene er som under punkt c). Anta at kula består vesentlig av vann (som er bundet slik at det ikke kan strømme). Ved hvilken tid $t = \tau$ er temperaturen i midten av kula ($r = 0$) sunket til $T = 0,1\, T_0 + T_\infty$ (slik at k_1-leddet dominerer) når $R = 5,0\,\text{cm}$ og $D = D_T = 0,00050\,\text{m}^2/\text{h}$ for vann?

Oppgitt: $\sin x/x \to 1$ når $x \to 0$, $\quad \int x \sin(\alpha x)\, dx = -x\cos(\alpha x)/\alpha + \sin(\alpha x)/\alpha^2$.