Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for fysikk

EKSAMENSOPPGAVE I SIF4016 - TERMISK FYSIKK
EKSAMENSOPPGAVE I SIF4016 - FYSIKK 4

Eksamensdato: Lørdag 10. august 2002
Eksamenstid: 09:00 - 13:00

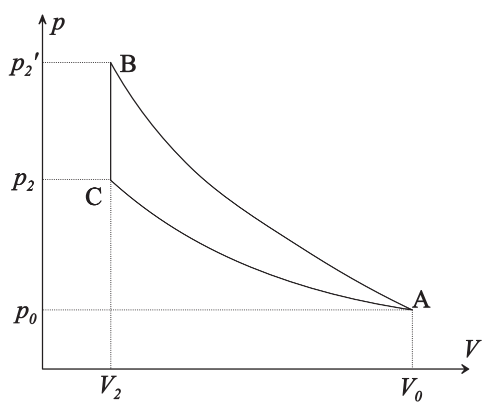
Faglig kontakt under eksamen: Arnljot Elgsæter, tlf. 7359 3431
Vekttall: 2,5
Tillatte hjelpemidler (kode C):
Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottmann: Matematisk formelsamling (norsk eller tysk utgave).
Øgrim & Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk.
Aylward & Findlay: SI Chemical Data.

Sensurdato: seinest 2. september 2002.

Prosenttallene i parantes etter hver oppgave angir hvor mye den vektlegges ved bedømmelsen.

Oppgave 1. Termodynamikk (40 %)

En luftkompressor skal komprimere luft fra trykk p_0=1,00 atm og temperatur $T_0 = 293$ K til trykk p_2 = 20,0 atm og samme samme temperatur, T_0. Startvolumet er $V_0 = 5{,}00$ m^3. Lufta komprimeres først adiabatisk til tilstand B med volum V_2. Temperaturen vil da øke til T_2 og trykket til p_2'. Deretter senkes temperaturen til T_0 i en isokor prosess til endelig sluttrykk p_2.



Alle prosesser kan regnes reversible og du kan regne lufta som en ideell toatomig gass med adiabatkonstant $\gamma = C_P/C_V = 7/5$.

a) Hva blir volumet V_2 og temperaturen T_2?

b) Hvor mye arbeid W_{ABC} utfører systemet (lufta) og hvor mye varme Q_{ABC} overføres til systemet i prosessen ABC?

Vi betrakter så en alternativ kompresjonsprosess langs en isoterm AC (se figuren).

c) Hvor mye arbeid, W_{AC}, utfører systemet i denne isoterme kompresjonen?

Tilslutt betrakter vi den sykliske prosessen ABCA.

d) Brukt som en maskin, virker prosessen som en varmekraftmaskin eller en kjølemaskin?

e) Beregn virkningsgraden for prosessen ABCA. Virkningsgraden er som vanlig definert som forholdet mellom det nyttige vi får ut og det vi må tilføre (som koster).

Oppgave 2. Uttrykk entropi. (20%)

For en ideell gass kan entropiendringen ved en tilstandsendring fra (p_1, V_1, T_1) til (p_2, V_2, T_2) uttrykkes

$$\Delta S_{12} = C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + \mathtt{N} R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

a) Utled herfra adiabatlikningen for ideell gass der T og V inngår.

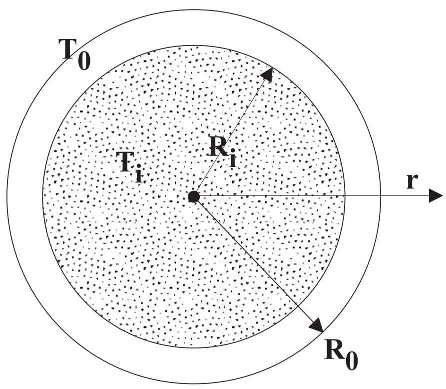
b) Bruk bl.a. den oppgitte formelen for ΔS_{12} til å forklare hvordan man kommer fram til uttrykket for blandingsentropien:

$$\Delta S_{\text{mix}} = -R \sum_{i=\text{A,B}} \mathtt{N}_i \ln x_i$$

når man blander to ideelle gasser med henholdsvis volum og antall mol $(V_\text{A}, \mathtt{N}_\text{A})$ og $(V_\text{B}, \mathtt{N}_\text{B})$ ved konstant temperatur og totaltrykk.

Oppgave 3. Varmeledning. (20 %)

Jorda som vi antar å ha kuleform med radius $R_0 =$ 6400 km, består av ei ytre skorpe med tykkelse omtrent 300 km. Temperaturen på jordoverflata er T_0. Den indre kula består i hovedsak av flytende jern og har radius $R_\text{i} = 6100$ km. Temperaturen i jordas indre er lik for alle $r < R_\text{i}$ og lik T_i. Jordskorpas varmeledningsevne setter vi lik $\kappa = 3,40\ \text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$. I jordas indre er det en viss varmeproduksjon $P = 34,0$ TW pga. radioaktive prosesser slik at T_i holdes konstant.



a) Ved å ta utgangspunkt i varmeledningslikningen, vis at ved stasjonære forhold kan temperaturgradienten $t(r) = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$ i jordskorpa uttrykkes

$$t(r) = -\frac{A}{r^2} \quad .$$

Bestem konstanten A.

b) Hva er middelverdien av $t(r)$ gjennom jordskorpa?

c) Som en god tilnærmelse kan vi sette middelverdien av $t(r)$ lik verdien av $t(r)$ midt i jordskorpa, d.v.s. ved $r = R_\text{s} = 6250$ km. Anta at $t(r)$ er konstant gjennom jordskorpa og lik $t(R_\text{s})$ og at jordas overflatetemperatur er $T_0 = 280$ K, og bestem så T_i .

Oppgave 4. Kinetisk gassteori. (20 %)

Et kammer inneholder n gasspartikler pr. volumenhet. Gassen er i termisk likevekt ved temperatur T.

a) Bruk uttrykk for $\mathrm{d}^3 j(v,\theta,\phi)$ i formelliste til å finne et uttrykk for støttallet mot veggen (pr. tids- og flateenhet) for partikler med fart i intervallet $\langle v, v+\mathrm{d}v\rangle$, uansett retning. Vis deretter at støttallet for partikler uansett fart og retning er gitt ved

$$j = \frac{n}{4}\langle v\rangle.$$

b) Et lite areal A på bunnen av kammeret holdes på en meget lav temperatur. Anta at alle molekyler som treffer denne kalde delen A kondenserer og ikke fordamper igjen.
Beregn den tid t' som forløper til trykket i kammeret har avtatt fra startverdi p_0 til en viss verdi p'. Det forutsettes at gassen er i termisk likevekt ved temperatur T under prosessen.

c) Beregn den numeriske verdien av t' når gassen er vanndamp med molekylmasse 18 g/mol, $p_0 = 2,0$ kPa, $T = 300$ K, $p' = 10,0$ mPa, $V = 1,00$ liter og $A = 1,00$ cm^2.

****

FORMELLISTE.

Du må selv avgjøre hvilke betingelser formlene gjelder ved, og du må selv tolke symbola.

Generelt:

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \qquad \beta = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \qquad \kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

$$H = U + pV \qquad F = U - TS \qquad G = H - TS \qquad G = \sum_i \mu_i N_i$$

$$T\mathrm{d}S = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V - \sum_i \mu_i \mathrm{d}N_i \qquad \mathrm{d}G = V\mathrm{d}p - S\mathrm{d}T + \sum \mu_i \mathrm{d}N_i$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \qquad C_P - C_V = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

Ideell gass / ideelle blandinger:

$$pV = NkT \qquad C_P - C_V = Nk \qquad pV^\gamma = \text{konst} \qquad TV^{\gamma-1} = \text{konst} \qquad p^{1-\gamma}T^\gamma = \text{konst}$$

$$S(T,V) = S_0 + C_V \ln\frac{T}{T_0} + Nk\ln\frac{V}{V_0} \qquad S(T,p) = S_0 + C_p \ln\frac{T}{T_0} - Nk\ln\frac{p}{p_0}$$

$$\Delta S_{\text{mix}} = -k\sum_i N_i \ln x_i \qquad \mu_i(p,T,x_i) \;=\; \mu_i(p,T,0) + kT\ln x_i$$

Clausius Clapeyrons likning:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{l_\mathrm{f}}{T(v_\mathrm{g} - v_\mathrm{v})} \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{l_\mathrm{sm}}{T(v_\mathrm{v} - v_\mathrm{f})} \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{l_\mathrm{sub}}{T(v_\mathrm{g} - v_\mathrm{f})}$$

Damptrykknedsettelse, kokepunktforhøyelse, frysepunktdepresjon:

$$\Delta p = -\frac{RT_0}{v'_{\mathrm{m}} - v_{\mathrm{m}}} \cdot x_{\mathrm{s}} \qquad \Delta T = \frac{RT_0^2}{l_{\mathrm{f}}} \cdot x_{\mathrm{s}} \qquad \Delta T = -\frac{RT_0^2}{l_{\mathrm{sm}}} \cdot x_{\mathrm{s}}$$

van't Hoffs lov: $$\Delta p = \frac{RT}{v_{\mathrm{m}}} \cdot x_{\mathrm{s}} = \frac{\mathtt{N}RT}{V}$$

Maxwellfordeling med $b = \dfrac{m}{2kT}$:

$$g(v_x) = \left(\frac{b}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left\{-bv_x^2\right\}$$

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{b}{\pi}\right)^{3/2} \exp\left\{-bv^2\right\} \qquad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{4}{\pi b}} \qquad \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2b}$$

$$\mathrm{d}^3 j(v,\theta,\phi) = \frac{n}{4\pi} v f(v)\mathrm{d}v \cos\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$$

Partikler pr. volumenhet med gitt fart og retning:

$$\mathrm{d}^3 n(v,\theta,\phi) = \frac{n}{4\pi} f(v)\mathrm{d}v \sin\theta \; \mathrm{d}\theta \; \mathrm{d}\phi$$

Romvinkel: $$\mathrm{d}\Omega = \sin\theta \; \mathrm{d}\theta \; \mathrm{d}\phi$$

Fri veglengde: $$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma} \qquad N(x) = N(0)\mathrm{e}^{-x/\lambda}$$

Varmeledning: $$\vec{\boldsymbol{j}} = -\kappa \vec{\boldsymbol{\nabla}} T \qquad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\kappa \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} A \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = D_T \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}}^2 T$$

Fotongass, Stefan-Boltzmanns lov:

$$U = Vu(T) = VaT^4 \qquad p = \frac{a}{3} T^4 \qquad j = \sigma T^4$$

Verdi av integralet $f(k) = \int_0^\infty x^k e^{-bx^2} \mathrm{d}x$:

k	$f(k)$	k	$f(k)$
0	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b}}$	1	$\frac{1}{2b}$
2	$\frac{1}{4b}\sqrt{\frac{\pi}{b}}$	3	$\frac{1}{2b^2}$
4	$\frac{3}{8b^2}\sqrt{\frac{\pi}{b}}$	5	$\frac{1}{b^3}$

Noen fysiske konstanter:

$R = 8,31 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1}$ $\qquad \sigma = a \cdot \frac{c}{4} = \frac{\pi^2}{60}\frac{k^4}{\hbar^3 c^2} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-4}$

$N_{\mathrm{A}} = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ $\qquad a = \frac{\pi^2}{15}\frac{k^4}{\hbar^3 c^3} = 7,57 \cdot 10^{-16} \text{ J m}^{-3}\text{K}^{-4}$

$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ $\qquad h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$

$0\,^\circ\mathrm{C} = 273 \text{ K}$ $\qquad 1 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg} = 760 \text{ torr} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$