Institutt for fysikk, NTNU
Faglig kontakt under eksamen:
Professor Johan S. Høye
Tlf. 93654
Sensurfrist: 23. juni.

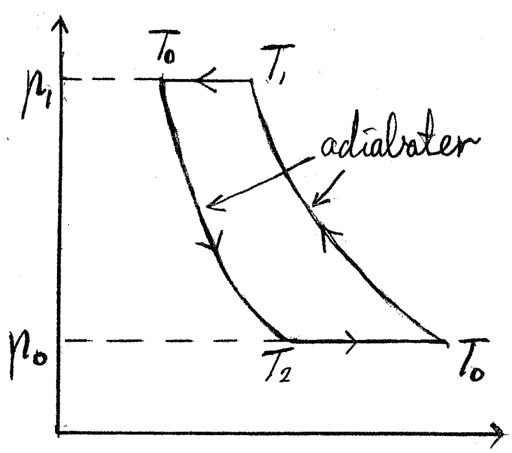
Eksamen i fag TFY4165 og FY1005 Termisk fysikk

Lørdag 2. juni 2007
Kl. 09.00 - 13.00

Tillatte hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator
Rottmann: Mathematisk Formelsamling

Oppgave 1

a)



Et mol av en ideell gass med trykk p_0 og temperatur T_0 skal komprimeres til trykket p_1. Dette gjøres ved at gassen først komprimeres adiabatisk (og reversibelt) til trykket p_1. Temperaturen stiger da til temperaturen T_1. Deretter avkjøles gassen under konstant trykk p_1 til temperaturen igjen er T_0. Hva blir temperaturen T_1 når adiabatkonstanten er γ? Gassen med trykk p_1 og temperatur T_0 ekspanderer så adiabatisk tilbake til trykket p_0, og temperaturen synker da til T_2 før gassen varmes opp igjen til utgangspunktet. Hva blir temperaturen T_2?

b) Betrakt her og i punkt c) nedenfor temperaturen T_1 som kjent ved siden av størrelsene gitt under punkt a). Hvor mye varme Q (< 0) opptas ved avkjølingen mellom temperaturene T_1 og T_0, og hvor stor er den tilsvarende endringen i indre energi ΔU?

Hvor mye arbeid W_1 (< 0) utfører gassen ved denne kompresjonen i to trinn mellom punktene med samme temperatur T_0?

c) Ved kompresjonen vil det utvendige trykket p_0 gjøre en del W_0 (> 0) av arbeidet. Hva blir nettoarbeidet $W_{1n} = W_1 + W_0$ (< 0) ved kompresjonen når adiabatkonstanten er $\gamma = 1,4$, gasskonstanten $R = 8.314\,\mathrm{J/K\,mol}$, $p_0 = 1,0 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$, $p_1 = 4p_0$, $T_0 = 20\,°\mathrm{C}$ og $T_1 = 435\,\mathrm{K}$?

Ved adiabatisk ekspansjon til temperaturen T_2 og oppvarming til utgangspunktet med temperatur T_0 vil arbeid utføres, men dette gir ikke maksimalt nyttbart arbeid. Hva er isteden det maksimale arbeidet W_m den komprimerte lufta kan utføre? [Hint: Benytt oppgitt uttrykk for maksimalt nyttbart arbeid.]

Oppgitt: $pV = RT$, $pV^\gamma = \text{konst}$, $\gamma = C_p/C_V$, $C_p = C_V + R$
$W_{max} = T_0\Delta S - \Delta U - p_0\Delta V$ (eksergi eller maksimalt arbeid)
$S = C_p \ln T - R\ln p + \text{konst}$ (entropi for ideell gass).

Oppgave 2

a) Bruk Boltzmanns prinsipp med å telle forskjellig konfigurasjoner til å vise at blandingsentropien er

$$\Delta S_{mix} = -\sum_{i=1}^{c} n_i R \ln(n_i/n) \qquad (n = \sum_{i=1}^{c} n_i)$$

når ideelle gasser blandes ved konstant volum V og konstant temperatur T. Her er n_i antall mol av komponent i $(i = 1, 2, 3, \cdots, c)$ der c er antall komponenter).

b) $4\,\mathrm{g}$ O_2 (oksygen) gass med molekylvekt 32 er blandet med $21\,\mathrm{g}$ N_2 gass med molekylvekt 28. Hva blir blandingsentropien ΔS_{mix}?

For å skille disse gassene kreves det et minste arbeid. Hva er dette minste arbeidet W når trykk og temperatur før og etter adskillelse er de samme og er henholdsvis $1\,\mathrm{atm}$ og $20\,°\mathrm{C}$?

Oppgitt: $N! \to \sqrt{2\pi N}\, N^N e^{-N}$ $(N \to \infty$, Stirlings formel)
$R = N_A k = 8,314\,\mathrm{J/K\,mol}$
$S = k\ln W$ (Boltzmanns prinsipp).

Oppgave 3

a) Vis ved innsetting at

$$T = T(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}$$

der i er den imaginære enhet og k og ω er konstanter, er løsning av varmeledningslikningen (i én dimensjon)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

og bestem hvordan k avhenger av ω.

b) Anta at temperaturen på jordoverflaten (som middel for hvert døgn) varierer som en cosinusfunksjon gjennom året (når en ser bort fra snø på bakken om vinteren). Temperaturen nedover i jorda vil da variere som (når vann ikke fryser)

$$T(x,t) = T_0 - T_1\, e^{-\alpha\sqrt{\omega}x}\cos\left(\alpha\sqrt{\omega}x - \omega t\right)$$

der T_0 er middeltemperaturen og T_1 er årlig utsving i temperaturen på overflaten i posisjonen $x = 0$. (Positiv x-akse er rettet nedover.) Benytt resultatet fra punkt a) til å bestemme sammenhengen mellom størrelsen α og diffusjonskoeffisienten D.

Hva blir den numeriske verdien til ω når året har $\tau_0 = 365$ dager? (Bruk helst 1 dag som tidsenhet istedenfor som mer vanlig 1 sekund.)

Laveste temperatur gjennom året vil variere med dybden, og det vil være frostfritt under en viss dybde x_0. Ved dybden x_0 er da laveste temperatur $T_m = 0\,^{\circ}C$. Hva er dybden x_0 når $T_0 = 4\,^{\circ}$C, $T_1 = 8\,^{\circ}$C og koeffisienten $\alpha = 4,8\,(\text{dag})^{1/2}\text{m}^{-1}$ (med aktuell verdi på termisk diffusivitet D).

Laveste temperatur i dybden x_0 opptrer en tid $t = \tau$ etter laveste temperatur $T_0 - T_1 = -4\,^{\circ}$C på overflaten. Hva er tiden τ?

c) Ei kule med radius $R_1 = 5,0\,\text{cm}$ og termisk diffusivitet $D_1 = 0,00050\,\text{m}^2/\text{time}$ er varmet opp lenge nok til å bli gjennomvarm med temperaturforskjell ΔT til omgivelsene. Overflatetemperaturen senkes så til temperaturen for omgivelsene. Kula vil da avkjøles og ved beregning har en funnet at etter en tid $t_1 = 90\,\text{min}$ vil temperaturen i midten av kula være ca $T_{1m} = \Delta T/10$. Betrakt så ei kule med radius $R_2 = 7,5\,\text{cm}$, men med samme D_1 og som varmes opp og avkjøles som den første kula. Hva blir nå tilsvarende avkjølingstid t_2? [Hint: Benytt sammenheng mellom tid og avstand ved varmeledning.]

Den siste kula blir nå byttet ut med ei kule av stål som også har radius $R_2 = 7,5\,\text{cm}$, men termisk diffusivitet endres til $D_s = 0,057\,\text{m}^2/\text{time}$. Hva blir den tilsvarende avkjølingstida t_s for stålkula med samme framgangsmåte for oppvarming og avkjøling? [Hint: Betrakt varmeledningslikningen og benytt sammenheng mellom tid og termisk diffusivitet ved varmeledning.]

Oppgitt: $i^2 = -1, \quad i^{1/2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \quad (i \text{ er imaginær enhet})$

$e^{iu} = \cos u + i\sin u.$