Eksamen FY1005/TFY4165 Termisk fysikk kl 09.00 - 13.00 lørdag 5. desember 2015

Bokmål

Oppgave 1. Termodynamiske potensialer og arbeid (Poeng: 5+10+10+5=30)

a. Gi en kort fysisk tolkning av hver av de fire termodynamiske potensialene indre energi U, entalpi $H = U + pV$, Helmholz fri energi $F = U - TS$, og Gibbs fri energi $G = F + pV$. Her er T temperatur, p trykk, V volum, og S entropi.

b. Et eksperimentelt varmekraftverk basert på varme fra jordas indre (et geotermisk kraftverk) på Island skal drives av varmeoverføring mellom to varmereservoarer med endelig størrelse. Det ene reservoaret varmes opp av vulkansk aktivitet fra vulkanen Barðarbunga, som ligger under isbreen Vatnajökull. Det andre reservoaret kjøles ned med brevann fra Vatnajökull. Varmekraftverket startes ved at en først termisk isolerer reservoarene fra de ytre omgivelsene, og så lar varme strømme fra det varme til det kalde reservoaret. Kraftverket går helt til temperaturene er jevnet ut mellom reservoarene. Det ene reservoaret har start-temperatur $T_1 = 350K$, det andre reservoaret har start-temperatur $T_2 = 275K$. Begge reservoarene har lik total varmekapasitet $C = 4.8 \cdot 10^7 J/K$, som vi antar konstant i det aktuelle temperatur-intervallet. Vi antar videre at når kraftverket settes igang, er hele systemet så godt varmeisolert at varme ikke opptas fra eller avgis til de ytre omgivelsene.

Finn slutt-temperaturen til de to reservoarene når varmeoverføringen brukes til å utføre eit maksimalt arbeid. Vis at denne temperaturen er mindre enn den slutt-temperaturen en ville fått dersom reservoarene hadde blitt bragt i direkte kontakt med hverandre og temperaturene hadde blitt jevnet ut i en irreversibel prosess uten at noe arbeid hadde blitt utført.

c. Finn det maksimale arbeidet som kan utøres av kraftverket.

d. Finn *effekten* til dette varmekraftverket, under de samme forutsetninger som gir maksimalt arbeid.

Oppgave 2. Carnot-prosess. (Poeng: 5+5+10+5+5=30)

En Carnot-prosess er en reversibel kretsprosess som består av to isoterme prosesser og to adiabatiske prosesser. Dersom vi tenker oss dette realisert for et gass-system, starter Carnot-prosessen i punktet 1 (V_1, T_1), gassen ekspanderer så isotermt til punktet 2 (V_2, T_1), ekspanderer deretter adiabatisk til punktet 3 (V_3, T_2), komprimeres deretter isotermt til punktet 4 (V_4, T_2), og komprimeres til slutt adiabatisk tilbake til punktet 1. Her er V volum og T temperatur.
La oss istedet tenke oss at vi skal se på dette for en ideell magnet, der termodynamisk identitet tar formen

$$TdS = dH + \mu_0 M d\mathcal{H}.$$

Her er H entalpi, μ_0 magnetisk permeabilitet, $\mathcal{H}$ er ytre magnetfelt, og M er magnetisering. En ideell magnet er definert ved tilstandsligningen

$$M = C\,\frac{\mathcal{H}}{T},$$

der C er en konstant.

a. Tegn opp Carnot-prosessen i et (T, S)-diagram.

b. Vis ved regning at virkningsgraden til en Carnot-maskin er helt uavhengig av arbeidssubstansen som brukes.

c. Vis at for en ideell magnet er sammenhengen mellom $\mathcal{H}$ og T langs en adiabat er gitt ved

$$C_{\mathcal{H}} T^2 - \mu_0 C \mathcal{H}^2 = \mathit{konstant}.$$

der $C_{\mathcal{H}} = (\partial H/\partial T)_{\mathcal{H}}$ er magnetens varmekapasitet ved konstant magnetfelt, og som antas uavhengig av temperatur og magnetfelt.

d. Tegn opp Carnot-prosessen for en ideell magnet i et $(T, \mathcal{H})$-diagram. Angi startpunkt, hva som er isotermer og adiabater, og hva som er retningen på kretsprosessen.

e. Vi tenker oss nå at denne ideelle magneten skal brukes i et miljøvennlig kjøleskap, til erstatning for et lukket sirkulasjonssystem som bruker gasser som kan være skadelige for ozonlaget på jorda. En fordel ved å bruke en slik magnet til kjøling, er at en unngår lekkasje- og resirkulerings-problematikk.

Anta at magneten er i termisk likevekt ved temperaturen T_1 og et magnetfelt $\mathcal{H}_1$, og gjennomløper en reversibel adiabatisk nedkjøling til temperaturen $T_2 = T_1 - \Delta T$ ved at magnetfeltet reduseres til $\mathcal{H}_2$. Finn temperaturendringen $\Delta T = T_1 - T_2$ uttrykt ved $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, T_1, $C_{\mathcal{H}}$, C, og μ_0, når $\Delta T \ll T_1$.

Oppgave 3. Kinetisk teori. (Poeng: 5+5+5+5=20)

Solsystemets største naturlige satelitt er månen Ganymede, som går i bane rundt planeten Jupiter. Hastigheten som molekyl må ha for at de skal unnslippe gravitasjonskreftene på Ganymede og slynges ut i verdensrommet, er $2700 m/s$. Ganymedes minimale, midlere, og maksimale overflate-temperatur er målt til henholdsvis $70, 110$ og 152 K.

a. Avgjør ved regning om molekylært hydrogen H_2 kan eksistere i Ganymedes atmosfære. Molekylvekten for H_2 er $m_{H_2} = 3.36 \cdot 10^{-27} kg$.

b. Finn den høyeste mulige temperaturen som tillater at metan CH_4 kan eksistere i atmosfæren til Ganymede. Molekylvekt for metan er $m_{CH_4} = 2.66 \cdot 10^{-26} kg$.

c. Ganymede har en radius på $2.6 \cdot 10^6 m$. Midlere avstand til sola er ca $820 \cdot 10^6 km$. Solas radius er $7 \cdot 10^5 km$ og dens overflate temperatur er $5800 K$. Beregn innstrålt energi per sekund og per kvadratmeter på Ganymede, fra strålingen som sola sender ut.

d. Anta nå at Ganymedes overflate er i termisk likevekt med omgivelsene. Beregn kraften per kvadratmeter som strålingen fra sola utøver på Ganymede.

FORMLER OG UTTRYKK.
Formlenes gyldighetsområde og symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk og betegnelser som i forelesningene. Vektorer med fete typer.

Utvidelseskoeffisienter, trykk-koeffisient, isoterm kompressibilitet:

$$\alpha_L = \frac{1}{L}\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_p \qquad \alpha_V = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \qquad \alpha_p = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \qquad \kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

Syklisk regel:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

Første hovedsetning:

$$đQ = dU + đW$$

Varmekapasitet:

$$C = \frac{đQ}{dT}$$

$$C_p - C_V = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p .$$

Termodynamiske potensialer:

$$H = U + pV \qquad F = U - TS \qquad G = H - TS \qquad G = \sum_j \mu_j N_j$$

Den termodynamiske identitet:

$$TdS = dU + pdV - \sum_j \mu_j dN_j$$

Ideell gass tilstandsligning:

$$pV = NkT = nRT$$

van der Waals tilstandsligning:

$$p = \frac{NkT}{V - Nb} - \frac{aN^2}{V^2}$$

Adiabatisk prosess:

$$đQ = 0$$

Joule-Thomson-koeffisienten:

$$\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H$$

PCH 4.18:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

Entalpi-versjonen av 4.18 PCH

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V$$

Virkningsgrad for varmekraftmaskin:

$$\eta = \frac{W}{Q_{\text{inn}}}$$

Virkningsgrad for Carnot-maskin:

$$\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Maxwells hastighetsfordeling:

$$g(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-mv_x^2/2kT} \qquad F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} \qquad f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

Gauss-integraler:

$$I_0(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$I_2(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{d}{d\alpha} I_0(\alpha) \quad \text{etc}$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} dx \; x \; e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{2\alpha}$$

Det klassiske ekvipartisjonsprinsippet:
Hver frihetsgrad som inngår kvadratisk i energifunksjonen E bidrar med $kT/2$ til midlere energi.

Partisjonsfunksjon:

$$Z = \sum_j e^{-E_j/kT} = e^{-\beta F} \qquad (\beta = 1/kT)$$

Kjøleskap, virkningsgrad (effektfaktor):

$$\varepsilon_K = \left|\frac{Q_{\text{ut}}}{W}\right|$$

Varmepumpe, virkningsgrad (effektfaktor):

$$\varepsilon_V = \left|\frac{Q_{\text{inn}}}{W}\right|$$

Entropi og Clausius' ulikhet:

$$dS = \frac{đQ_{\text{rev}}}{T} \qquad \oint dS = 0 \qquad \oint \frac{đQ}{T} \leq 0$$

Boltzmanns prinsipp:

$$S = k \ln W$$

Stirlings formel:

$$N! = \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N} \qquad (N \to \infty)$$

Eksergi:

$$W_{\text{max}} = -\Delta G \quad \text{med} \quad G = U - T_0 S + p_0 V$$

Kjemisk potensial:

$$\mu_j = \left(\frac{\partial G}{\partial N_j}\right)_{p,T,N_{i\neq j}}$$

Ideell blanding:

$$\Delta S_{\text{mix}} = -k \sum_j N_j \ln x_j \qquad \mu_j = \mu_j^0 + kT \ln x_j$$

(Clausius-)Clapeyrons ligning:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta S}{\Delta V}$$

Strålingshulrom, frekvensfordeling:

$$\frac{du}{df} = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{f^3}{\exp(hf/kT) - 1} \quad ; \quad u(T) = \int_0^{\infty} \frac{du}{df} df$$

Stefan-Boltzmanns lov:

$$j_s(T) = \frac{c}{4} u(T) = \sigma T^4 \qquad (\sigma = 2\pi^5 k^4 / 15 h^3 c^2)$$

Fouriers lov:

$$j = -\kappa \nabla T \quad ; \quad j = \dot{Q}/A$$

Varmeledningsligningen:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \nabla^2 T$$

Ficks lov:

$$j = -D \nabla n$$

Diffusjonsligningen:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \nabla^2 n$$

U-verdi:

$$j = U \Delta T$$

Midlere fri veilengde, fortynnet gass ($n = N/V$; σ = spredningstverrsnitt):

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma}$$

Varmeledningsevne, fortynnet gass (c_V = varmekapasitet pr molekyl; m = molekylmasse):

$$\kappa = \frac{2 c_V}{3\sigma} \sqrt{\frac{kT}{\pi m}}$$

Diffusjonskonstant, fortynnet gass:

$$D = \frac{2}{3 n \sigma} \sqrt{\frac{kT}{\pi m}} = \frac{\kappa}{n c_V}$$

Fysiske konstanter:

$$\begin{aligned}
k &= 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \\
R &= 8.314 \text{ J/molK} \\
N_A &= 6.02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \\
\hbar &= h/2\pi = 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \\
e &= 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\
\mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} N/A^2 \\
m_e &= 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\
u &= 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\
c &= 3.00 \cdot 10^{8} \text{ m/s} \\
\sigma &= 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4
\end{aligned}$$

Omregningsfaktorer:

$$\begin{aligned}
1 \text{ eV} &= 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\
1 &= 10^{-10} \text{ m} \\
1 \text{ cal} &= 4.184 \text{ J} \\
1 \text{ bar} &= 10^{5} \text{ Pa} \\
1 \text{ atm} &= 1.013 \cdot 10^{5} \text{ Pa}
\end{aligned}$$