

Eksamen TFY4165 Termisk fysikk kl 09.00 - 13.00 torsdag 15. desember 2016
Bokmål

Oppgave 1. (Varmeledning. Poeng: 10+10+10=30)

Kontinuitetsligningen for energitetthet u og energistrømtetthet \mathbf{j} er gitt ved

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

Se på et kuleskall med indre radius R_1 og ytre radius R_2 . Det indre kuleskallet holdes på en konstant temperatur T_1 og det ytre kuleskallet holdes på en konstant temperatur $T_2 < T_1$. Det antas stasjonære forhold.

a. Vis at den totale varmestrømmen \dot{Q} gjennom en tenkt kuleflate med radius $R_1 < r < R_2$ inne i kuleskallet, er uavhengig av r .

b. Bruk dette resultatet til å finne temperaturen $T(r)$ inne i kuleskallet som funksjon av r , når vi antar at varmeledningsevnen κ har formen $\kappa = aT$, der a er en dimensjonsbeheftet positiv konstant. Svaret skal uttrykkes kun ved (R_1, R_2, r) og (T_1, T_2) .

c. Vi setter nå $T_2 = 200$ K. Kuleskallet er laget av en aluminiumslegering der $a = 0.79$ W/m K², og $R_1 = 2$ dm og $R_2 = 5$ dm. Hva blir den høyeste temperaturen T_1 det indre kuleskallet kan ha når det kreves at effekttapet fra kula ikke skal overstige 1000 W?

Oppgitt:

Gauss' sats:

$$\iiint_V dV \nabla \cdot \mathbf{j} = \oiint_{A(V)} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A}$$

Oppgave 2. (Reversibel kretsprosess. Poeng: 5+5+10+10=30)

Multiferroiske materialer er faststoff-materialer som fremviser koeksisterende egenskaper som ferromagnetisme, ferroelektrisitet, etc. De har en rekke potensielt viktige teknologiske anvendelser innen informasjons- og kommunikasjonsteknologi, og har også en rekke anvendelser innen miljøvennlig teknologi. I denne oppgaven skal vi se på termodynamikken til et slikt system, og en mulig miljøvennlig anvendelse.

Termodynamikken til slike system kan generelt formuleres ved hjelp av et ytre felt y (en intensiv variabel), og en fysisk størrelse X (en ekstensiv variabel) som måler graden av innretning av et dipolmoment av ett eller annet slag langs det ytre feltet. Den termodynamiske identitet tar formen

$$T dS = dH + X dy,$$

der $H = H(T, y)$ er systemets entalpi.

a. Vis at for slike system kan termodynamisk identitet skrives

$$T dS = C_y dT + T \left(\frac{\partial X}{\partial T} \right)_y dy,$$

der $C_y = (\partial H / \partial T)_y$ er varmekapasiteten ved konstant ytre felt y , som en antar er uavhengig av temperatur og det ytre feltet y .

b. Et spesielt slikt system har tilstandsligning

$$X(T, y) = \chi \left(\frac{y}{T} \right)^\alpha,$$

der χ er en positiv dimensjonsbeheftet konstant, og $1 \leq \alpha < 2$. Vis at for dette systemet er sammenhengen mellom det ytre feltet y og temperaturen T langs en adiabat gitt ved

$$AT^\delta - By^\delta = \text{konstant}.$$

og finn derved (A, B, δ) uttrykt ved konstantene (C_y, χ, α) .

c. Systemet utfører nå en reversibel kretsprosess i 4 steg: 1) Isoterm varmetilførsel ved en temperatur T_h , 2) adiabatisk prosess til en tilstand med temperatur $T_c < T_h$, 3) isoterm varmeavgang ved T_c , og 4) adiabatisk prosess til en tilstand med temperatur T_h . Tegn opp denne kretsprosessen i et (T, y) -diagram med startpunkt og retning på prosessen.

d. Vi tenker oss nå at dette systemet blir brukt i en varmepumpe ved at prosessen i oppgave **c.** blir kjørt i revers. Regn ut tilført varme Q_t og avgitt varme Q_a , og regn ut virkningsgraden η til varmepumpen. Svaret for η skal uttrykkes som en funksjon kun av T_h og T_c .

Hint: Her må du bruke adiabatligningen fra oppgave **b.** Om du ikke klarte å finne (A, B, δ) uttrykt ved konstantene (C_y, χ, α) , kan du regne med adiabatligningen med konstantene (A, B, δ) .

Oppgave 3. (Gass av to-atomige molekyler i to dimensjoner. Poeng: 10+15+5=30)

Se på en gass av to-atomige molekyler der partiklene kun kan bevege seg i to dimensjoner, dvs kun i (x, y) -planet. Gassen er så fortynnet at vi kan se bort fra krefter som måtte virke mellom de to-atomige molekylerne.

a. Bruk det klassiske ekvipartisjonsprinsippet til å finne varmekapasiteten C_V til gassen per molekyl.

b. En samling av N uavhengige en-dimensjonale harmoniske oscillatorer har tilstandssum Z gitt ved

$$Z = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega (n+1/2)} \right)^N .$$

Her er \hbar Planck's konstant, og $\omega = 2\pi\nu$, der ν er svingefrekvensen til oscillatoren. Finn varmekapasiteten $C_V = (\partial U / \partial T)_V$ til denne samlingen av harmoniske oscillatorer. Hva blir C_V i høytemperatur-grensen $T \gg \hbar\omega/k$ og lavtemperatur-grensen $T \ll \hbar\omega/k$?

c. Anta at vibrasjonsmoden til de to-atomige molekylerne i oppgave **a** kan beskrives som en harmonisk oscillator, og at frekvensen ν svarer til en temperatur $T_0 = \hbar\omega/k = 500$ K. Skisser varmekapasiteten til gassen i oppgave **a** som funksjon av temperatur T . Du kan gå ut fra at rotasjonsfrihetsgraden(e) i gassen gir et bidrag bestemt av det klassiske ekvipartisjonsprinsippet for alle temperaturer.

Oppgitt:

Hver rotasjonsfrihetsgrad gir et bidrag $E = I\omega^2/2$ til energien til systemet. Her er I et treghetsmoment og ω er rotasjonsfrekvensen.

Sammenheng mellom S og F :

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V$$

FORMLER OG UTTRYKK.

Formlenes gyldighetsområde og symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk og betegnelser som i forelesningene. Vektorer med fete typer.

Utvidelseskoeffisienter, trykk-koeffisient, isotherm kompressibilitet:

$$\alpha_L = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_p \quad \alpha_V = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad \alpha_p = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \quad \kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$$

Syklisk regel:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = -1$$

Første hovedsetning:

$$dQ = dU + dW$$

Varmekapasitet:

$$C = \frac{dQ}{dT}$$

$$C_p - C_V = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

Termodynamiske potensialer:

$$H = U + pV \quad F = U - TS \quad G = H - TS \quad G = \sum_j \mu_j N_j$$

Den termodynamiske identitet:

$$TdS = dU + pdV - \sum_j \mu_j dN_j$$

Generalisert termodynamisk identitet for et sett med intensive variable $\{y_i\}$ og et sett ekstensive variable $\{X_i\}$:

$$TdS = dU - \sum_i y_i dX_i$$

$$TdS = dH + \sum_i X_i dy_i$$

Ideell gass tilstandsligning:

$$pV = NkT = nRT$$

van der Waals tilstandsligning:

$$p = \frac{NkT}{V - Nb} - \frac{aN^2}{V^2}$$

Adiabatisk prosess:

$$dQ = 0$$

Joule-Thomson-koeffisienten:

$$\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_H$$

PCH 4.18:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

Entalpi-versjonen av 4.18 PCH

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V$$

Generaliserte varianter av disse, med y intensiv variabel og X ekstensiv variabel:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_T = -T \left(\frac{\partial y}{\partial T}\right)_X + y$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_T = T \left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_y - X$$

Virkningsgrad for varmekraftmaskin:

$$\eta = \frac{W}{Q_{\text{inn}}}$$

Virkningsgrad for Carnot-maskin:

$$\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Maxwells hastighetsfordeling:

$$g(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-mv_x^2/2kT} \quad F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} \quad f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

Gauss-integraler:

$$I_0(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$I_2(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{d}{d\alpha} I_0(\alpha) \quad \text{etc}$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} dx x e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{2\alpha}$$

Det klassiske ekvipartisjonsprinsippet:

Hver frihetsgrad som inngår kvadratisk i energifunksjonen E bidrar med $kT/2$ til midlere energi.

Partisjonsfunksjon:

$$Z = \sum_j e^{-E_j/kT} = e^{-\beta F} \quad (\beta = 1/kT)$$

Kjøleskap, virkningsgrad (effektfaktor):

$$\varepsilon_K = \left| \frac{Q_{\text{ut}}}{W} \right|$$

Varmepumpe, virkningsgrad (effektfaktor):

$$\varepsilon_V = \left| \frac{Q_{\text{inn}}}{W} \right|$$

Entropi og Clausius' ulikhet:

$$dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} \quad \oint dS = 0 \quad \oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

Boltzmanns prinsipp:

$$S = k \ln W$$

Stirlings formel:

$$N! = \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N} \quad (N \rightarrow \infty)$$

Eksergi:

$$W_{\max} = -\Delta G \quad \text{med} \quad G = U - T_0 S + p_0 V$$

Kjemisk potensial:

$$\mu_j = \left(\frac{\partial G}{\partial N_j} \right)_{p, T, N_{i \neq j}}$$

Ideell blanding:

$$\Delta S_{\text{mix}} = -k \sum_j N_j \ln x_j \quad \mu_j = \mu_j^0 + kT \ln x_j$$

(Clausius-)Clapeyrons ligning:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta S}{\Delta V}$$

Strålingshulrom, frekvensfordeling:

$$\frac{du}{df} = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{f^3}{\exp(hf/kT) - 1} \quad ; \quad u(T) = \int_0^\infty \frac{du}{df} df$$

Stefan-Boltzmanns lov:

$$j_s(T) = \frac{c}{4} u(T) = \sigma T^4 \quad (\sigma = 2\pi^5 k^4 / 15 h^3 c^2)$$

Fouriers lov:

$$\mathbf{j} = -\kappa \nabla T \quad ; \quad j = \dot{Q}/A$$

Varmeledning ligningen:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \nabla^2 T$$

Ficks lov:

$$\mathbf{j} = -D \nabla n$$

Diffusjonsligningen:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \nabla^2 n$$

U -verdi:

$$j = U \Delta T$$

Midlere fri veilengde, fortynnet gass ($n = N/V$; $\sigma =$ spredningstverrsnitt):

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$$

Varmeledningsevne, fortynnet gass ($c_V =$ varmekapasitet pr molekyl; $m =$ molekylmasse):

$$\kappa = \frac{2c_V}{3\sigma} \sqrt{\frac{kT}{\pi m}}$$

Diffusjonskonstant, fortynnet gass:

$$D = \frac{2}{3n\sigma} \sqrt{\frac{kT}{\pi m}} = \frac{\kappa}{nc_V}$$

Fysiske konstanter:

$$\begin{aligned} k &= 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \\ R &= 8.314 \text{ J/molK} \\ N_A &= 6.02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \\ \hbar &= h/2\pi = 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \\ e &= 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 \\ m_e &= 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\ u &= 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\ c &= 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\ \varepsilon_0 &= \frac{1}{c^2 \mu_0} \\ \sigma &= 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4 \end{aligned}$$

Omregningsfaktorer:

$$\begin{aligned} 1 \text{ eV} &= 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\ 1 &= 10^{-10} \text{ m} \\ 1 \text{ cal} &= 4.184 \text{ J} \\ 1 \text{ bar} &= 10^5 \text{ Pa} \\ 1 \text{ atm} &= 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa} \end{aligned}$$