Eksamen TFY4165 Termisk fysikk kl 09.00 - 13.00 mandag 7. august 2017

Bokmål

Oppgave 1. (Varmeledning. Poeng: 5+10+5=20)

Kontinuitetsligningen for energitetthet u og energistrømtetthet $\mathbf{j}$ er gitt ved

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

Se på et sylinderskall med indre radius R_1 og ytre radius R_2. Det indre sylinderskallet holdes på en konstant temperatur T_1 og det ytre sylinderskallet holdes på en konstant temperatur $T_2 < T_1$. Det antas stasjonære forhold.

a. Vis at den totale varmestrømmen $\dot{Q}$ gjennom en tenkt sylinderflate med radius $R_1 < r < R_2$ inne i sylinderskallet, er uavhengig av r.

b. Bruk dette resultatet til å finne temperaturen $T(r)$ inne i sylinderskallet som funksjon av r, når vi antar at varmeledningsevnen κ er en temperatur-uavhengig konstant. Svaret skal uttrykkes kun ved (R_1, R_2, r) og (T_1, T_2).

c. Vi setter nå $T_2 = 300$ K. Sylinderskallet er laget av en aluminiumslegering der vi kan ta som representativ verdi $\kappa = 200$ W/m K, og $R_1 = 1$ dm og $R_2 = 6$ dm. Hva blir den høyeste temperaturen T_1 det indre sylinderskallet kan ha når det kreves at effekttapet fra kula ikke skal overstige 1000 W?

Oppgitt:
Gauss' sats:

$$\iiint_V dV \; \nabla \cdot \mathbf{j} = \oiint_{A(V)} \mathbf{j} \cdot \mathbf{dA}$$

Oppgave 2. **(Reversibel kretsprosess. Poeng: 10+10+10+10=40)**

Termodynamikken til et vilkårlig ferromagnetisk, ferroelektisk, eller multiferroisk system kan generelt formuleres ved hjelp av et ytre felt y (en intensiv variabel), og en fysisk størrelse X (en ekstensiv variabel) som måler graden av innretning av et dipolmoment av ett eller annet slag langs det ytre feltet. Den termodynamiske identitet for et slikt system kan skrives på formen

$$T\ dS = C_y\ dT + T\left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_y\ dy,$$

der $C_y = (\partial H/\partial T)_y$ er varmekapasiteten ved konstant ytre felt y, hvor H er systemets entalpi.

a. Vis at sammenhengen mellom C_y og X gitt ved

$$\left(\frac{\partial C_y}{\partial y}\right)_T = T\ \left(\frac{\partial^2 X}{\partial T^2}\right)_y$$

b. Et spesielt slikt system har tilstandsligning

$$X(T, y) = \chi\ \frac{y}{T},$$

der χ er en dimensjonsbeheftet positiv konstant. Vis at sammenhengen mellom y og temperaturen T langs en adiabat gitt ved

$$\frac{y}{T} = \text{konstant}$$

(Hint: Finn eksplisitt uttrykk for C_y fra tilstandsligningen og sammenhengen mellom C_y og X. Du kan anta at $C_y = 0$ når $y = 0$. Bruk deretter termodynamisk identitet langs en adiabat.)

c. Systemet utfører nå en reversibel kretsprosess i 4 steg: 1) Isoterm varmetilførsel ved en temperatur T_h, 2) adiabatisk prosess til en tilstand med temperatur $T_c < T_h$, 3) isoterm varmeavgang ved T_c, og 4) adiabatisk prosess til en tilstand med temperatur T_h. Tegn opp denne kretsprosessen i et (T, y)-diagram med startpunkt og retning på prosessen.

d. Vi tenker oss nå at dette systemet blir brukt i en varmepumpe ved at prosessen i oppgave **c.** blir kjørt i revers. Regn ut tilført varme Q_t og avgitt varme Q_a, og regn ut virkningsgraden η til varmepumpen. Svaret for η skal uttrykkes som en funksjon kun av T_h og T_c.
(Hint: Her må du bruke adiabatligningen fra oppgave **b.**)

<u>Oppgave 3.</u> (Gass av to-atomige molekyler i to dimensjoner. Poeng: 10+10+10+10=40)

I denne oppgaven ser vi på et system av N uavhengige to-dimensjonale klassiske harmoniske oscillatorer. Energi-funksjonen ε til en oscillator er gitt ved

$$\varepsilon = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{K}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$

Her er (p_x, p_y) impulsen til partikkelen i (x, y)-retning, og (x, y) er posisjonene. For senere bruk innfører vi $\omega = \sqrt{K/m}$, slik at $K = m\omega^2$. Det to-dimensjonale "volumet"(arealet) partiklene befinner seg i, er en sirkel med radius R, slik at $V = \pi R^2$. Vi ser først på temperaturer som er slik at $\beta m\omega^2 R^2/2 \gg 1$, da dette forenkler beregningen litt. Koordinatene til alle oscillatorene er målt i forhold til origo i denne sirkelen (alle sammen svinger rundt senteret av sirkelen).

a) Beregn tilstandssummen

$$Z = \frac{1}{N!h^{2N}} \prod_{i=1}^{N} \int d^2\mathbf{p}_i \int d^2\mathbf{r}_i e^{-\beta E}$$

der $E = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i$ er energien til alle N oscillatorene.

b) Beregn indre energi U og varmekapasitet C_V til dette systemet. Verifiser at resultatet stemmer med det klassiske ekvipartisjonsprinsippet.

c) Beregn trykket partiklene i systemet utøver på veggen i beholderen, og gi en fysisk forklaring på svaret du finner.

d) Gå nå bort i fra forutsetningen om at $\beta m\omega^2 R^2/2 \gg 1$, og beregn trykket som partiklene i gassen utøver mot veggen. Finn spesielt dette trykket når $\beta m\omega^2 R^2/2 \ll 1$, og gi en fysisk forklaring på resultatet.
Oppgitt:

$$U = -\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}\right)$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

FORMLER OG UTTRYKK.

Formlenes gyldighetsområde og symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk og betegnelser som i forelesningene. Vektorer med fete typer.

Utvidelseskoeffisienter, trykk-koeffisient, isoterm kompressibilitet:

$$\alpha_L = \frac{1}{L}\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_p \qquad \alpha_V = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \qquad \alpha_p = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \qquad \kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

Syklisk regel:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

Første hovedsetning:

$$đQ = dU + đW$$

Varmekapasitet:

$$C = \frac{đQ}{dT}$$

$$C_p - C_V = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p .$$

Termodynamiske potensialer:

$$H = U + pV \qquad F = U - TS \qquad G = H - TS \qquad G = \sum_j \mu_j N_j$$

Den termodynamiske identitet:

$$TdS = dU + pdV - \sum_j \mu_j dN_j$$

Generalisert termodynamisk identitet for et sett med intensive variable $\{y_i\}$ og et sett ekstensive variable $\{X_i\}$:

$$TdS = dU - \sum_i y_i dX_i$$

$$TdS = dH + \sum_i X_i dy_i$$

Ideell gass tilstandsligning:

$$pV = NkT = nRT$$

van der Waals tilstandsligning:

$$p = \frac{NkT}{V - Nb} - \frac{aN^2}{V^2}$$

Adiabatisk prosess:

$$đQ = 0$$

Joule-Thomson-koeffisienten:

$$\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H$$

PCH 4.18:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

Entalpi-versjonen av 4.18 PCH

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V$$

Generaliserte varianter av disse, med y intensiv variabel og X ekstensiv variabel:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_T = -T\left(\frac{\partial y}{\partial T}\right)_X + y$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_T = T\left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_y - X$$

Virkningsgrad for varmekraftmaskin:

$$\eta = \frac{W}{Q_{\text{inn}}}$$

Virkningsgrad for Carnot-maskin:

$$\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Maxwells hastighetsfordeling:

$$g(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-mv_x^2/2kT} \qquad F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} \qquad f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

Gauss-integraler:

$$I_0(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$I_2(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\ e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{d}{d\alpha} I_0(\alpha) \quad \text{etc}$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} dx\ x\ e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{2\alpha}$$

Det klassiske ekvipartisjonsprinsippet:
Hver frihetsgrad som inngår kvadratisk i energifunksjonen E bidrar med $kT/2$ til midlere energi.

Partisjonsfunksjon:

$$Z = \sum_j e^{-E_j/kT} = e^{-\beta F} \qquad (\beta = 1/kT)$$

Kjøleskap, virkningsgrad (effektfaktor):

$$\varepsilon_K = \left|\frac{Q_{\text{ut}}}{W}\right|$$

Varmepumpe, virkningsgrad (effektfaktor):

$$\varepsilon_V = \left|\frac{Q_{\text{inn}}}{W}\right|$$

Entropi og Clausius' ulikhet:

$$dS = \frac{đQ_{\text{rev}}}{T} \qquad \oint dS = 0 \qquad \oint \frac{đQ}{T} \le 0$$

Boltzmanns prinsipp:

$$S = k \ln W$$

Stirlings formel:

$$N! = \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N} \qquad (N \to \infty)$$

Eksergi:

$$W_{\max} = -\Delta G \quad \text{med} \quad G = U - T_0 S + p_0 V$$

Kjemisk potensial:

$$\mu_j = \left(\frac{\partial G}{\partial N_j} \right)_{p,T,N_{i \neq j}}$$

Ideell blanding:

$$\Delta S_{\text{mix}} = -k \sum_j N_j \ln x_j \qquad \mu_j = \mu_j^0 + kT \ln x_j$$

(Clausius-)Clapeyrons ligning:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta S}{\Delta V}$$

Strålingshulrom, frekvensfordeling:

$$\frac{du}{df} = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{f^3}{\exp(hf/kT) - 1} \quad ; \quad u(T) = \int_0^\infty \frac{du}{df}\, df$$

Stefan-Boltzmanns lov:

$$j_s(T) = \frac{c}{4} u(T) = \sigma T^4 \qquad (\sigma = 2\pi^5 k^4 / 15 h^3 c^2)$$

Fouriers lov:

$$\boldsymbol{j} = -\kappa \nabla T \quad ; \quad j = \dot{Q}/A$$

Varmeledningsligningen:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \nabla^2 T$$

Ficks lov:

$$\boldsymbol{j} = -D \nabla n$$

Diffusjonsligningen:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \nabla^2 n$$

U-verdi:

$$j = U \Delta T$$

Midlere fri veilengde, fortynnet gass ($n = N/V$; σ = spredningstverrsnitt):

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma}$$

Varmeledningsevne, fortynnet gass (c_V = varmekapasitet pr molekyl; m = molekylmasse):

$$\kappa = \frac{2c_V}{3\sigma} \sqrt{\frac{kT}{\pi m}}$$

Diffusjonskonstant, fortynnet gass:

$$D = \frac{2}{3n\sigma} \sqrt{\frac{kT}{\pi m}} = \frac{\kappa}{n c_V}$$

Fysiske konstanter:

$$\begin{aligned}
k &= 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \\
R &= 8.314 \text{ J/molK} \\
N_A &= 6.02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \\
\hbar &= h/2\pi = 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \\
e &= 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\
\mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} N/A^2 \\
m_e &= 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\
u &= 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\
c &= 3.00 \cdot 10^{8} \text{ m/s} \\
\varepsilon_0 &= \frac{1}{c^2 \mu_0} \\
\sigma &= 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4
\end{aligned}$$

Omregningsfaktorer:

$$\begin{aligned}
1 \text{ eV} &= 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\
1 &= 10^{-10} \text{ m} \\
1 \text{ cal} &= 4.184 \text{ J} \\
1 \text{ bar} &= 10^{5} \text{ Pa} \\
1 \text{ atm} &= 1.013 \cdot 10^{5} \text{ Pa}
\end{aligned}$$