Eksamen TFY4165 Termisk fysikk kl 09.00 - 13.00 mandag 11. desember 2017

Bokmål

Oppgave 1. (Varmeledning i kuleskall. Poeng: 10+10+10=30)

I denne oppgaven ser vi på et kuleskall som består av to lag med forskjellige materialer. Det innerste kuleskallet har indre radius R_1 og ytre radius R_2. Det ytterste kuleskallet har indre radius R_2 og ytre radius R_3. Varmeledningsevnen til det indre kuleskallet er κ_1. Varmeledningsevnen til det ytre kuleskallet er κ_2. Ved radiene R_1 og R_3 holdes temperaturene konstant lik henholdsvis T_1 og T_3. Vi antar at $T_1 > T_3$. Vi antar videre stasjonære forhold, slik at kontinuitets-ligningen tar formen

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

Her er $\mathbf{j}$ varmestrømtettheten i kuleskallet.

a. Vis at total varmestrøm P igjennom ethvert kuleformet sjikt med radius $R_1 < r < R_3$ i kuleskallet er uavhengig av radien r, regnet fra sentrum i hele systemet, og at den kan skrives på formen

$$P = G_1(T_1 - T_2) = G_2(T_2 - T_3)$$

der G_1 og G_2 er termisk konduktans i det innerste og ytterste kuleskallet. Vis derved at G_1 og G_2 er gitt ved

$$\frac{1}{G_1} = \frac{1}{4\pi\kappa_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right); \quad \frac{1}{G_2} = \frac{1}{4\pi\kappa_2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)$$

Hint: Bruk at i et system med kulesymmetri har vi at

$$\nabla T = \frac{dT}{dr}\ \hat{e}_r$$

og at volumet av et kuleskall med tykkelse dr er gitt ved $dV = 4\pi\ r^2\ dr$. $\hat{e}_r$ er radiell enhetsvektor.

b. La $R_2 = 2R_1$ og $R_3 = 4R_1$. Det lagdelte kuleskallet i oppgave **a.** kan også sees på som ett kuleskall med indre radius R_1 og ytre radius R_3, og med én effektiv varmeledningsevne κ_{eff}. Finn denne effektive varmeledningsevnen, uttrykt ved κ_1 og κ_2. (Hint: Start med å skrive varmestrømmen P på formen $P = G(T_1 - T_3)$ og uttrykk G ved hjelp av G_1 og G_2. Innfør deretter κ_{eff} på samme vis som det er gjort for κ_i i G_i i oppgave **a.**).

c. La fortsatt $R_1 = 2R_1$ og $R_3 = 4R_1$. Vi setter nå $T_1 = 1000$ K, $T_3 = 200$ K, og $\kappa_1 = 2\kappa_2$. Finn temperaturen T_2 ved $r = R_2$.

Oppgitt:
Gauss' sats:

$$\iiint_V dV\ \nabla \cdot \mathbf{j} = \oiint_{A(V)} \mathbf{j} \cdot \mathbf{dA}$$

Oppgave 2. (System av partikler med to energi-nivå. Poeng: 10+10+10=30)

Et fast-stoff system består av N uavhengige partikler, der hver partikkel kan være i to tilstander. Tilstand 1 til partikkel nummer j har energi $\varepsilon_{j1} = -\varepsilon$, tilstand 2 har energi $\varepsilon_{j2} = \varepsilon$. Tilstands-summen for systemet er gitt ved

$$Z = \prod_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{2} e^{-\beta\varepsilon_{ji}}$$

Her er $\beta = 1/k_B T$, der k_B er Boltzmanns konstant, og T er temperaturen.

a. Vis at systemets indre energi er gitt ved

$$U = -N\varepsilon \ \tanh(\beta\varepsilon)$$

b. Finn varmekapasiteten

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

til systemet i høytemperatur-grensen $k_B T \gg \varepsilon$.

c. To like klosser av dette systemet bringes i termisk kontakt med hverandre. Klossene er forøvrig fullstendig varmeisolerte fra omgivelsene. Det ene systemet har start-temperatur T_1, det andre systemet har start-temperatur T_2, og vi antar at $T_1 > T_2$. Vi antar også at $k_B T_1 \gg \varepsilon$ og $k_B T_2 \gg \varepsilon$. Temperaturen jevnes ut mellom de to klossene i en reversibel prosess. Finn slutt-temperaturen $T_S^{(R)}$ for denne prosessen uttrykt ved T_1 og T_2, og finn det maksimale arbeidet systemet kan utføre i den reversible temperatur-utjevningen.
Hint: Se bort fra volumendringer i klossene under temperatur-utjevningene.

Oppgitt:

$$U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$$

Termodynamisk identitet:

$$\begin{aligned} TdS &= C_V dT + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV \\ TdS &= C_p dT - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp \end{aligned}$$

Oppgave 3. (Kretsprosess med ideell gass. Poeng: 10+10+10=30)

Brayton-syklusen er en fullstendig reversibel kretsprosess som beskriver idealiserte gassturbiner og jetmotorer. Den består av to isobare og to adiabatiske prosesser. I denne oppgaven skal vi studere Brayton-syklusen med en ideell gass som arbeidssubstans. I startpunktet 1 har systemet trykket p_1, volumet V_1, og temperatur T_1. Stegene i prosessen er som følger:

1. Isobar ekspansjon til (p_1, T_2, V_2)
2. Adiabatisk ekspansjon til (p_2, T_3, V_3)
3. Isobar kompresjon til (p_2, T_4, V_4)
4. Adiabatisk kompresjon til (p_1, V_1, T_1)

a. Tegn opp prosessen i et (p, V)-diagram og et (T, S)-diagram, med angivelse av startpunkt og retning på prosessen, og angi hvor i prosessen varme tilføres og avgis.

b. Regn ut den tilførte varmen Q_t og den avgitte varmen Q_a i prosessen. (Hint: Uttrykk svarene ved hjelp av varmekapasiteten ved konstant trykk, C_p, og temperatur-differansene $T_2 - T_1$ og $T_4 - T_3$.)

c. Regn ut virkningsgraden η for maskinen basert på denne kretsprosessen, uttrykt ved p_1 og p_2, samt $\gamma \equiv C_p/C_V$, der C_V er varmekapasiteten ved konstant volum V. (Hint: Bruk adiabatligningene til å eliminere temperaturene $(T_1, ..T_4)$ til fordel for (p_1, p_2)). Hva gir høyest virkningsgrad for denne prosessen av en ideell én-atomig og ideell to-atomig gass? Svaret skal begrunnes.

Oppgitt: Langs adiabater har vi, for ideell gass:

$$TV^{\gamma-1} = \text{konstant}; \quad pV^{\gamma} = \text{konstant}; \quad Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{konstant}$$

Termodynamisk identitet:

$$\begin{aligned} TdS &= C_V dT + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV \\ TdS &= C_p dT - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp \end{aligned}$$

Varmekapasitet $C_V^{(1)}$ for én-atomig ideell gass, og $C_V^{(2)}$ for to-atomig ideell gass ved de temperaturene det er snakk om her:

$$\begin{aligned} C_V^{(1)} &= \frac{3Nk_B}{2} \\ C_V^{(2)} &= \frac{5Nk_B}{2} \end{aligned}$$

FORMLER OG UTTRYKK.

Formlenes gyldighetsområde og symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk og betegnelser som i forelesningene. Vektorer med fete typer.

Utvidelseskoeffisienter, trykk-koeffisient, isoterm kompressibilitet:

$$\alpha_L = \frac{1}{L}\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_p \qquad \alpha_V = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \qquad \alpha_p = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \qquad \kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

Syklisk regel:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

Første hovedsetning:

$$đQ = dU + đW$$

Varmekapasitet:

$$C = \frac{đQ}{dT}$$

$$C_p - C_V = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p .$$

Termodynamiske potensialer:

$$H = U + pV \qquad F = U - TS \qquad G = H - TS \qquad G = \sum_j \mu_j N_j$$

Den termodynamiske identitet:

$$TdS = dU + pdV - \sum_j \mu_j dN_j$$

Generalisert termodynamisk identitet for et sett med intensive variable $\{y_i\}$ og et sett ekstensive variable $\{X_i\}$:

$$TdS = dU - \sum_i y_i dX_i$$

$$TdS = dH + \sum_i X_i dy_i$$

Ideell gass tilstandsligning:

$$pV = NkT = nRT$$

van der Waals tilstandsligning:

$$p = \frac{NkT}{V - Nb} - \frac{aN^2}{V^2}$$

Adiabatisk prosess:

$$đQ = 0$$

Joule-Thomson-koeffisienten:

$$\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H$$

PCH 4.18:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

Entalpi-versjonen av 4.18 PCH

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V$$

Generaliserte varianter av disse, med y intensiv variabel og X ekstensiv variabel:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_T = -T\left(\frac{\partial y}{\partial T}\right)_X + y$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_T = T\left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_y - X$$

Virkningsgrad for varmekraftmaskin:

$$\eta = \frac{W}{Q_{\text{inn}}}$$

Virkningsgrad for Carnot-maskin:

$$\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Maxwells hastighetsfordeling:

$$g(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-mv_x^2/2kT} \qquad F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} \qquad f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

Gauss-integraler:

$$I_0(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$I_2(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\ e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{d}{d\alpha} I_0(\alpha) \quad \text{etc}$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} dx\ x\ e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{2\alpha}$$

Det klassiske ekvipartisjonsprinsippet:
Hver frihetsgrad som inngår kvadratisk i energifunksjonen E bidrar med $kT/2$ til midlere energi.

Partisjonsfunksjon:

$$Z = \sum_j e^{-E_j/kT} = e^{-\beta F} \qquad (\beta = 1/kT)$$

Kjøleskap, virkningsgrad (effektfaktor):

$$\varepsilon_K = \left|\frac{Q_{\text{ut}}}{W}\right|$$

Varmepumpe, virkningsgrad (effektfaktor):

$$\varepsilon_V = \left|\frac{Q_{\text{inn}}}{W}\right|$$

Entropi og Clausius' ulikhet:

$$dS = \frac{đQ_{\text{rev}}}{T} \qquad \oint dS = 0 \qquad \oint \frac{đQ}{T} \leq 0$$

Boltzmanns prinsipp:

$$S = k \ln W$$

Stirlings formel:

$$N! = \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N} \qquad (N \to \infty)$$

Eksergi:

$$W_{\max} = -\Delta G \quad \text{med} \quad G = U - T_0 S + p_0 V$$

Kjemisk potensial:

$$\mu_j = \left(\frac{\partial G}{\partial N_j} \right)_{p,T,N_{i \neq j}}$$

Ideell blanding:

$$\Delta S_{\text{mix}} = -k \sum_j N_j \ln x_j \qquad \mu_j = \mu_j^0 + kT \ln x_j$$

(Clausius-)Clapeyrons ligning:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta S}{\Delta V}$$

Stefan-Boltzmanns lov:

$$j_s(T) = \frac{c}{4}\, u(T) = \sigma\, T^4$$

Fouriers lov:

$$\boldsymbol{j} = -\kappa \nabla T \quad ; \quad j = \dot{Q}/A$$

Varmeledningsligningen:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \nabla^2 T$$

Ficks lov:

$$\boldsymbol{j} = -D \nabla n$$

Diffusjonsligningen:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \nabla^2 n$$

U-verdi:

$$j = U \Delta T$$

Fysiske konstanter:

$$\begin{aligned}
k &= 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \\
R &= 8.314 \text{ J/molK} \\
N_A &= 6.02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \\
\hbar &= h/2\pi = 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \\
e &= 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\
\mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} N/A^2 \\
m_e &= 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\
u &= 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\
c &= 3.00 \cdot 10^{8} \text{ m/s} \\
\varepsilon_0 &= \frac{1}{c^2 \mu_0} \\
\sigma &= 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4
\end{aligned}$$

Omregningsfaktorer:

$$\begin{aligned}
1 \text{ eV} &= 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\
1 &= 10^{-10} \text{ m} \\
1 \text{ cal} &= 4.184 \text{ J} \\
1 \text{ bar} &= 10^{5} \text{ Pa} \\
1 \text{ atm} &= 1.013 \cdot 10^{5} \text{ Pa}
\end{aligned}$$