Kontinuasjonseksamen i fag 74306
Termisk fysikk den 9/8-96.

Forslag til løsning.

Oppgave 1.

a) Langs adiabatene gjelder

$$pV^{\gamma} = \text{konst}$$

Eliminer p v.h.a. $pV = RT$ og finner

$$(RT/V)\,V^{\gamma} = \text{konst}$$

$$T\,V^{\gamma-1} = \text{konst.}$$

Med $C_p = C_v + R$ for ideell gass har en så

$$\gamma \doteq C_p/C_V = (7/2)/(5/2) = \underline{1{,}4}$$

eller $\gamma - 1 = \underline{0{,}4}$; $1/(\gamma-1) = \underline{2{,}5}$

Følgelig finner en

$$T_1 V_0^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1}$$

$$V_3 = \underline{\underline{V_0\,(T_1/T_3)^{1/(\gamma-1)}}}$$

Ved temperaturene T_2 og T_3 er trykket det samme slik at $pV = RT$ gir

$$V_2/T_2 = V_3/T_3$$

$$V_2 = \underline{\underline{V_3\,\frac{T_2}{T_3}}} = \underline{\underline{V_0\,\frac{T_2}{T_3}\left(\frac{T_1}{T_3}\right)^{1/(\gamma-1)}}}$$

For å bestemme V_1 brukes igjen adiabatlikningen som ovenfor. Resultatet blir følgelig

$$V_1 = V_2\left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{1/\gamma-1} = V_0\,\frac{T_2}{T_3}\left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{1/\gamma-1} = \underline{\underline{V_0\left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\alpha}}}$$

der $\alpha = \gamma/(\gamma-1) = \underline{\tfrac{7}{2}} = \underline{3{,}5}$

b) Langs adiabatene tilføres ikke varme, dvs

$$Q_{12} = Q_{31} = \underline{\underline{0}}$$

Langs isobaren har en oppvarming ved konstant trykk, dvs.

$$Q_{23} = C_p(T_3 - T_2) = (C_V + R)(T_3 - T_2) = \underline{\underline{\alpha R(T_3 - T_2)}}$$

da $C_p = \gamma C_v = C_v + R$, dvs. $C_V = R/(\gamma-1)$. $(\alpha = \frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{7}{2})$.

Langs isotermen er tilført varme lik utført arbeid da konstant temperatur ikke gir endring i indre energi for ideell gass. Når $pV = RT$ og resultatet fra punkt a) benyttes blir arbeidet

$$Q_{11} = \int_{V_0}^{V_1} p\,dV = RT_1 \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V} = RT_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)$$

$$= \underline{\underline{\alpha R T_1 \ln(T_2/T_3)}} \quad (<0)$$

c) Langs adiabaten er det ikke noen endring i entropien (reversibel prosess uten tilførsel av varme). Langs isotermen vil endringen i entropi følge av

$$T\,dS = đQ = dU + dW = dW \quad (dU = 0)$$

Så med $T = T_1 = \text{konstant}$ får vi følgelig

$$\Delta S_{31} = S_3 - S_1 = S_2 - S_1 = -(S_1 - S_2) = \frac{-Q_{11}}{T_1} = \underline{\underline{\alpha R \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right)}}$$

For ideell gass avhenger indre energi kun av temperaturen slik at den tilhørende endringen i indre energi blir

$$\Delta U_{31} = C_V(T_3 - T_1) = \underline{\underline{\tfrac{5}{2}R(T_3 - T_1)}}$$

d) Utført arbeid W er lik netto tilført varme for en hel syklus ($\Delta U = 0$).

$$W = Q_{23} + Q_{11}.$$

Virkningsgraden blir følgelig

$$\eta = \frac{W}{Q_{23}} = 1 + \frac{Q_{11}}{Q_{23}} = \underline{\underline{1 - \frac{T_1 \ln(T_3/T_2)}{T_3 - T_2}}}$$

e) Varmeutveksling med omgivelsene for å endre temperaturen fra T_4 til T_1 vil være en irreversibel prosess. Dette fører til at total entropi øker og dermed går noe av muligheten til å utføre arbeid tapt. Følgelig vil virkningsgraden være størst når $T_4 = T_1$ for da forsvinner dette tapet (når T_2 og T_3 er fast). [Når $T_4 \neq T_1$ kunne varmeutvekslingen over temperaturgapet brukes til å drive en varmekraftmaskin som kunne kompensere det nevnte tapet. Uten denne kompensasjonen vil entropiendringen være $dS_{tot} = dS_{mask} + dS_{omg.} = dQ\,(1/T_4 - 1/T_1) > 0$ da $dQ \gtrless 0$ avhenger av $T_1 \gtrless T_4$ (dvs. varmestrøm fra varmt til kaldere).]

Oppgave 2

a) Fra $G = U - TS + pV$ finner en først

$$dG = dU - TdS - SdT + pdV + Vdp$$

Dette benyttes så til å eliminere dU i den termodynamiske identitet

$$TdS = dU + pdV$$

som så gir

$$dG = -SdT + Vdp$$

Av dette finner en først

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -S \quad \text{og} \quad \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T = V$$

Ved å derivere 2 ganger finner en så

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)$$

eller

$$\underline{\underline{-\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}}$$

Når en erstatter U med $H = U + pV$ i den termodynamiske identitet finnes

$$dH = dU + pdV + Vdp$$

som innsatt gir

$$TdS = dH - Vdp$$

Fra denne likningen følger så

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T - V.$$

Ved å benytte Maxwellrelasjonen følger dermed

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = V + T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \underline{\underline{V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}}$$

b/ For Joule-Thompson koeffisienten finner vi

$$\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{-1}{\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial H}\right)_T} = \frac{-1}{C_p}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T$$

Her har vi først benyttet $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -1$.
Videre er $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z^{-1} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$ benyttet, og til slutt er spesifikk varme ved konstant trykk

$$C_p = \left(\frac{đQ}{dT}\right)_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$$

Ved å sette inn resultatet fra punkt a) følger så

$$\underline{\underline{\mu_{JT} = \frac{1}{C_p}\left[T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V\right]}}$$

c/ Differensiering av tilstandslikningen gir

$$0 = dp = \left(\frac{R}{V} + \frac{dB}{dT}\frac{1}{V^2}\right)dT - \left(\frac{RT}{V^2} + 2\frac{B}{V^3}\right)dV$$

$$T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = V\left(R + \frac{dB}{dT}\frac{1}{V}\right)\Big/\left(R + 2\frac{B}{TV}\right)$$

og følgelig $\mu_{JT} = \frac{1}{C_p}\left(T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V\right)$

$$= \frac{1}{C_p}V\left(R + \frac{dB}{dT}\frac{1}{V} - R - 2\frac{B}{TV}\right)\Big/\left(R + 2\frac{B}{TV}\right) = \left(\frac{dB}{dT} - \frac{2B}{T}\right)\Big/\left(R + 2\frac{B}{TV}\right)$$

$$\xrightarrow{V\to\infty} \frac{1}{R}\left(\frac{dB}{dT} - \frac{2B}{T}\right)\frac{1}{C_p}$$

Oppgave 3

a/ Sannsynligheten for at oscillatoren skal være i en bestemt tilstand er gitt ved Boltzmannfaktoren

$$p_n = C e^{-\beta E_n} = C e^{-x\left(\frac{1}{2}+n\right)}$$

der $x = \beta\hbar\omega$ og C er bestemt av normeringen

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

En finner

$$1 = C e^{-\frac{1}{2}x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-x}\right)^n = \frac{C e^{-\frac{1}{2}x}}{1-e^{-x}}$$

da summen er en geometrisk rekke.
Følgelig har en

$$C e^{-\frac{1}{2}x} = 1 - e^{-x}$$

slik at den søkte sannsynligheten blir

$$p_n = \underline{\underline{\left(1 - e^{-\beta\hbar\omega}\right)e^{-\beta\hbar\omega n}}}$$

b) Energi utover grunntilstandsenergien for de enkelte nivåene er

$$\varepsilon_n = E_n - E_0 = \hbar\omega n$$

Midlere energi til en svingemode blir da

$$\varepsilon(\nu) = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n p_n = \hbar\omega(1-u)\sum_{n=0}^{\infty} n u^n$$

$$\varepsilon(\nu) = \hbar\omega(1-u)u\frac{d}{du}\left(\sum_{n=0}^{\infty}u^n\right) = \hbar\omega(1-u)u\frac{d}{du}\left(\frac{1}{1-u}\right)$$

$$= \hbar\omega\frac{u}{1-u} = h\nu\frac{1}{e^{\beta h\nu}-1}$$

der $u = e^{-\beta\hbar\omega} = e^{-\beta h\nu}$ $(h = 2\pi\hbar,\ \beta = 1/kT)$.

Plancks lov blir følgelig

$$u(\nu,T) = \frac{1}{V}g(\nu)\varepsilon(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3(e^{\beta h\nu}-1)}$$

c) Volumet av termosen er $V = \frac{4\pi}{3}R^3$ slik at radien blir

$$R = \left(\frac{3}{4\pi}V\right)^{1/3} = \left(\frac{3}{4\pi}0{,}5\,dm^3\right)^{1/3} = \underline{0{,}492\,dm}$$

Overflaten til kulen er dermed

$$A = 4\pi R^2 = \underline{3{,}05\,dm^2}$$

Netto utstrålt effekt mellom lagene blir så

$$P = A(j_{T+\Delta T} - j_T) = A\sigma\left[(T+\Delta T)^4 - T^4\right]$$

$$= \underline{4A\sigma T^3\Delta T} + \cdots$$

For å bestemme hvor raskt temperaturen endrer seg når effekten er P, trenger en så varmekapasiteten til vannet i flaska. Denne er

$$C = C_p\cdot m = 4{,}185\,J/gK\cdot 500\,g = \underline{2{,}09\cdot 10^3\,J/K}$$

Avgitt effekt vil nå være

$$-C\frac{dT}{dt} \qquad (>0)$$

Denne effekten er igjen lik den utstrålte effekten P slik at vi får likningen $(\Delta T = T - T_0)$

$$-C\frac{dT}{dt} = -C\frac{d(\Delta T)}{dt} = P = 4A\sigma T^3\Delta T$$

eller

$$\frac{d(\Delta T)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\Delta T$$

Denne likningen har løsningen

$$\Delta T = \Delta T_0\, e^{-t/\tau}$$

Decay-tiden er følgelig

$$\tau = \frac{C}{4A\sigma T^3} = \frac{2{,}09\cdot 10^3\,J/K}{4\cdot 3{,}05\cdot 10^{-2}\,m^2\cdot 5{,}67\cdot 10^{-8}\,J/sm^2\,(293K)^3}$$

$$= \underline{1{,}20\cdot 10^4\,s} = \underline{3\tfrac{1}{3}\text{ time}}$$