

Oppgave 1.

a) Tilstandslikningen for lufta ved start- og slutttilstand gir mulighet for bestemmelse av V_2 :

$$p_0 V_0 = nRT_0, \quad p_2 V_2 = nRT_0 \quad \Rightarrow \quad V_2 = V_0 \cdot \frac{p_0}{p_2} = 5,00 \text{ m}^3 \frac{1}{20} = \underline{0,25 \text{ m}^3}.$$

Vi kan også beregne antall mol av gassen (kan få bruk for seinere):

$$n = \frac{p_0 V_0}{RT_0} = \frac{101330 \text{ N/m}^2 \cdot 5,0 \text{ m}^3}{8,31 \cdot 293 \text{ Nm/mol}} = 208,1 \text{ mol}.$$

Vi unngår å innføre trykket p'_2 og bruker derfor adiabatlikningen på form $T_0 V_0^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$ for å bestemme T_2 . Dette gir

$$T_2 = T_0 \cdot \left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{\gamma-1} = 293 \text{ K} \cdot \left(\frac{5,0}{0,25}\right)^{2/5} = \underline{971 \text{ K}}.$$

b) Det er kun under den adiabatiske prosessen det utveksles arbeid. Her er $pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma$, og dermed

$$\begin{aligned} \underline{W_a} &= \int_{V_0}^{V_2} p dV = \int_{V_0}^{V_2} p_0 V_0^\gamma \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{p_0 V_0^\gamma}{1-\gamma} [V^{1-\gamma}]_{V_0}^{V_2} = \frac{p_0 V_0}{1-\gamma} \left[\left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1 \right] \\ &= \frac{101330 \text{ N/m}^2 \cdot 5,0 \text{ m}^2}{-0,40} \left[\left(\frac{5,0}{0,25}\right)^{0,40} - 1 \right] = \underline{-2,93 \text{ MJ}}. \quad (\text{arbeid utført på systemet}) \end{aligned}$$

Når slutt-temperatur er lik start-temperaturen er den indre energi U for ideell gass uendret. Fra første hovedsetning beregner vi varme tilført systemet:

$$\underline{Q_a = W_a = -2,93 \text{ MJ}} \quad (\text{varme er trukket ut av systemet}).$$

Man kunne eventuelt beregnet Q fra hver delprosess: Ingen varme tilføres under den adiabatiske kompresjonen, og for den isokore prosessen har vi

$$\underline{Q_a = C_V \Delta T = 5/2 \cdot nR(T_0 - T_2) = 5/2 \cdot 208 \text{ mol} \cdot 8,31 \cdot (293 - 971) \text{ J/mol} = -2,93 \text{ MJ}}.$$

c) For den isoterme prosessen viser pV -diagrammet at arbeidet er mindre. Vi finner:

$$\underline{W_t} = \int_{V_0}^{V_2} p dV = \int_{V_0}^{V_2} nRT_0 \frac{dV}{V} = nRT_0 \cdot \ln \frac{V_2}{V_0} = 208 \cdot 8,31 \cdot 293 \text{ J} \cdot \ln \frac{0,25}{5,0} = \underline{-1,52 \text{ MJ}}$$

Entropien er definert $dS = dQ/T$. Langs isoterme er $Q = W_t$ fordi det for ideell gass ikke er endring i indre energi når temperaturen er konstant.

$$\underline{\Delta S} = \int_0^2 \frac{dQ_{\text{rev, isoterm}}}{T} = \frac{W_t}{T_0} = nR \cdot \ln \frac{V_2}{V_0} = 208 \cdot 8,31 \text{ J/K} \cdot \ln \frac{0,25}{5,0} = \underline{-5,18 \text{ kJ/K}}.$$

Da entropien er en tilstandsfunksjon (uavhengig av prosessen som bringer systemet fra start til slutt) kunne vi evt. brukt adiabat+isokorprosessene i beregningen. Adiabatene gir ingen entropiendring da $Q = 0$, og man måtte beregnet for isokoren.

d) Det enkleste er å beregne mengde vanndamp i systemet før og etter kompresjonen. Differansen må være lik mengden vann kondensert. Vanndamptrykket ved start er $p_{v,0} = 17,5 \text{ mmHg} \cdot 60\% = 10,5 \text{ mmHg} = 10,5 \cdot 101330 \text{ N/m}^2 / 760 \text{ mmHg} = 1400 \text{ N/m}^2$. Siden temperaturen er konstant vil metningstrykket forbli $p_{v,2} = 17,5 \text{ mmHg} = 2333 \text{ N/m}^2$, og straks partialtrykket av vanndamp har nådd denne verdien vil det holde seg konstant der.

Start: $n_0 = \frac{p_{v,0} V_0}{RT_0} = 2,875 \text{ mol}$ (med $V_0 = 5,0 \text{ m}^3$, og $T_0 = 293 \text{ K}$).

Slutt: $n_2 = \frac{p_{v,2} V_2}{RT_0} = 0,240 \text{ mol}$ (med $V_2 = 0,25 \text{ m}^3$, og $T_0 = 293 \text{ K}$).

Kondensert vann: $\Delta n = n_0 - n_2 = 2,635 \text{ mol}$, dvs. $\Delta m = 2,635 \text{ mol} \cdot 18 \text{ g/mol} = 47 \text{ g}$.

Vi har i slutttilstanden sett bort fra volumet av kondensert vann som altså er $47 \text{ cm}^3 \ll V_2 = 0,25 \text{ m}^3$.

Kondensasjonen av 2,64 mol vanndamp vil gi fra seg varme $Q = l_f \cdot \Delta n = 107,2 \text{ kJ}$ (denne varmen avgis til omgivelsene i tillegg til den beregnet ovenfor). Siden kondensasjonen foregår ved konstant temperatur vil entropiendringen i samband med kondenseringen være

$$\Delta S_{\text{vann}} = -Q/T_0 = -0,366 \text{ kJ/K}.$$

Oppgave 2.

a) Fouriers lov for sylindersymmetri:

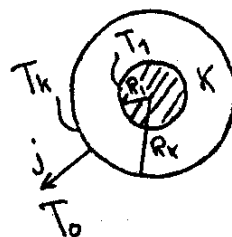
$$\frac{dQ}{dt} = -\kappa \frac{dT}{dr} A = -\kappa \frac{dT}{dr} 2\pi r l$$

Denne varmestrømmen (i watt) må være lik for alle lag gjennom kappe og lik den genererte effeten P . Med $P' = P/l$ gir dette differensiallikningen

$$-dT = \frac{P' dr}{2\pi\kappa r}$$

Integrert fra indre sylinder T_1 og R_1 til ytre kappe T_K og R_K :

$$-(T_K - T_1) = \frac{P'}{2\pi\kappa} \ln \frac{R_K}{R_1} \Rightarrow P' = \frac{2\pi\kappa}{\ln \frac{R_K}{R_1}} (T_1 - T_K).$$



b) Stefan-Boltzmanns lov for netto varmefluks (W/m^2) fra kappeoverflata til omgivelsene:

$$j = \sigma(T_K^4 - T_0^4).$$

La oss skrive $T_K - T_0 = \Delta T$. Da er

$$T_K^4 = (T_0 + \Delta T)^4 = T_0^4 + 4T_0^3 \Delta T + 6T_0^2 \Delta T^2 + 4T_0 \Delta T^3 + \Delta T^4 \approx T_0^4 + 4T_0^3 \Delta T$$

når vi ser bort fra høyere ordens ledd av ΔT , som alt er liten i forhold til T_0 .

(Alternativt: $T_K^4 - T_0^4 = (T_K^2 - T_0^2)(T_K^2 + T_0^2) = (T_K - T_0)(T_K + T_0)(T_K^2 + T_0^2) \approx (T_K - T_0)(2T_0)(2T_0^2) = (T_K - T_0)4T_0^3$.)

Dermed er $j = \sigma(T_K^4 - T_0^4) \approx \sigma 4T_0^3 \Delta T$, dvs. $\alpha = 4T_0^3 \sigma$.

Fortsatt er den genererte effekten P' lik utover i alle lag, dermed også lik nettostrålingen fra kappeoverflata til omgivelsene. Når fluks j er gitt i W/m^2 finner vi

$$P = j \cdot A = j \cdot 2\pi R_K \cdot l \quad \text{og dermed} \quad P' = j \cdot 2\pi R_K = \alpha(T_K - T_0) \cdot 2\pi R_K.$$

Herfra løser vi ut T_K som vi setter inn i uttrykket for P' i a):

$$T_K = \frac{P'}{2\pi\alpha R_K} + T_0 \Rightarrow P' = \frac{2\pi\kappa}{\ln \frac{R_K}{R_1}} (T_1 - T_0) - \frac{P' \kappa}{\ln \frac{R_K}{R_1} R_K \alpha} \Rightarrow P' = \frac{2\pi\kappa (T_1 - T_0)}{\ln \frac{R_K}{R_1} + \frac{\kappa}{R_K \alpha}}$$

Oppgave 3.

a) Fra definisjonen av F : $dF = dU - TdS - SdT$. Innsatt den termodynamiske identitet for et åpent system: $dU = TdS - pdV + \mu dN$, får vi

$$dF = TdS - \mu dV - TdS - SdT + \mu dN = -pdV - SdT + \mu dN.$$

Differensialet for F uttrykt ved partiellderiverte:

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} dV + \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} dT + \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} dN.$$

Sammenlikning med uttrykket over gir de søkte relasjonene. (Feil i oppg.tekst: Indeks $S,V \rightarrow T,V$).

b) For ideell enatomig gass er $E = \frac{1}{2m} \sum \vec{p}_i^2$, der \vec{p}_i = massefart til partikkel i (ingen vekselvirkning mellom partikler). Altså E uavhengig av r , slik at romintegralet kan separeres:

$$\int \dots \int d^{3N}r = \left(\int d^3r \right)^N = V^N$$

Innsatt uttrykket for E får vi integranden

$$e^{-\beta E} = \prod_i^N \left(e^{-\beta p_{x,i}^2/2m} \cdot e^{-\beta p_{y,i}^2/2m} \cdot e^{-\beta p_{z,i}^2/2m} \right)$$

Fordelingen er isotrop og lik for alle partikler, slik at integralet for hver koordinatretning gir samme bidrag:

$$\int \dots \int e^{-\beta E} \cdot d^{3N}p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta p^2/2m} \cdot dp \right)^{3N} = (2\pi mkT)^{3N/2}$$

(siste overgang fra integraltabellen på formelarket). Dette gir

$$Z = \frac{1}{N! h^{3N}} \cdot \int \dots \int e^{-\beta E} \cdot d^{3N}r \cdot d^{3N}p = \frac{1}{N! h^{3N}} \cdot V^N \cdot (2\pi mkT)^{3N/2},$$

$$\ln Z = -\ln N! - N \ln h^3 + N \ln V + N \ln (2\pi mkT)^{3/2} \approx -N \ln N + N + N \ln V + N \ln \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3}$$

Og dermed

$$F = -kT \ln Z = -kTN + kTN \ln \frac{N}{V} + kTN \ln \frac{h^3}{(2\pi mkT)^{3/2}}$$

Sammenlikning med oppgitt uttrykk:

$$F = -NkT + NkT \cdot \ln \left(\frac{N}{V} \lambda^3 \right) \quad \text{gir at} \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$$

Oppgave 4.

Antall partikler dj med fart mellom v og $v + dv$ som unnslipper pr. tids- og flateenhet er lik støttallet som er oppgitt på formelarket:

$$dj = \frac{n}{4} v f(v) dv.$$

Totalt antall som slipper ut uansett fart ved å integrere over alle mulige v : $j = \frac{n}{4} \int_0^{\infty} v f(v) dv = \frac{n}{4} \langle v \rangle.$

Brøkdelen av partikler som slipper ut med fart mellom v og $v + dv$ er derfor $\frac{dj}{j} = \frac{v}{\langle v \rangle} f(v) dv = f_{ut}(v) dv$

der altså $f_{ut}(v) = \frac{v}{\langle v \rangle} f(v)$ blir lik fordelingsfunksjonen for unnslippende partikler. Dermed finner vi

$$\langle v \rangle_{ut} = \int_0^{\infty} v f_{ut}(v) dv = \frac{1}{\langle v \rangle} \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv = \frac{\langle v^2 \rangle}{\langle v \rangle}$$

Og det relative antallet blir

$$\frac{\langle v \rangle_{ut}}{\langle v \rangle} = \frac{\langle v^2 \rangle}{\langle v \rangle^2} = \frac{3kT/m}{8kT/\pi m} = \frac{3\pi}{8} = 1,19.$$

Der $\langle v^2 \rangle$ og $\langle v \rangle$ er oppgitt på formelarket. Det er altså 19% større middelfart for partiklene som slipper ut av hullet enn de som er i likevekt inne i beholderen.

Oppgave 5.

Sannsynligheten for hver tilstand er proporsjonal med Boltzmannsfaktoren: $e^{-E_n/kT}$. Ved svært lave temperaturer (dvs. slik at $E_1/kT \gg 1$) er sannsynlighetene for å finne energinivå E_2 og E_3 forsvinnende små i forhold til å finne grunntilstanden E_1 . Dvs. kun energinivå 1 opptrer.

Ved svært høye temperaturer (dvs. slik at $E_3/kT \ll 1$) vil alle fire tilstander (fordelt på tre energinivå) være like sannsynlig (fordi $e^{-E_n/kT} \approx 1$ for alle n). Men energinivå 2 har altså degenerasjonsgrad 2 og derfor dobbelt så stor sannsynlighet. Resultat:

$$U = \langle E \rangle = \begin{cases} E_1 & \text{når } kT \ll E_1 \\ \frac{E_1 + 2E_2 + E_3}{4} = \frac{12}{4}E_1 = 3E_1 & \text{når } kT \gg E_3 \end{cases}$$

Entropien er gitt av Boltzmannlikningen $S = k \ln W$, der W er antall tilgjengelige (mikro) tilstander. Fra argumentene over ser vi at det er én tilgjengelig tilstand for lave temperaturer og fire for høye temperaturer. Derfor:

$$S = k \ln W = \begin{cases} k \ln 1 = 0 & \text{når } kT \ll E_1 \\ k \ln 4 = 2k \ln 2 & \text{når } kT \gg E_3 \end{cases}$$

AM. 22.5.97

Karakterstatistikk:

1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	Ikke møtt	Totalt	Middel (uten 6,0)
8	16	17	20	10	9	2	1	1	0	4	10	88	2,32

Middelkarakter for de ulike oppgavene (fra faglærers bedømmelse):

1a	1b	1c	1d	2a	2b	3a	3b	4	5
1,2	1,9	1,5	3,5	2,2	3,4	1,2	3,2	3,4	2,4

Relativt mye å gjøre. Noen oppgaver falt vanskelig, men flere oppgaver var også svært enkle, slik at det skulle være godt mulig å berge seg med en brukbar karakter.

AM. 24.6.97