

Løsningsforslag for Kont.eksamen 9.aug. 1997.

Oppgave 1.

a) Ved adiabatisk prosesser utveksles ingen varme, $Q = 0$ og $\Delta U = -W$; ved isokore prosesser intet arbeid, $W = 0$ og $\Delta U = Q$. Dette gir:

Arbeid (W_2) påført i adiabat AB, varme (Q_2) tilført i isokor BC,
 Arbeid (W_1) utført i adiabat CD, varme (Q_1) avgitt i isokor DA.

Det er enklest å bruke ΔU til å beregne størrelsene, siden $\Delta U = C_V \Delta T$ for ideell gass. Vi får:

$$W_2 = -\Delta U_{AB} = -C_V(T_B - T_A) < 0, \quad Q_2 = \Delta U_{BC} = C_V(T_C - T_B) > 0.$$

$$W_1 = -\Delta U_{CD} = -C_V(T_D - T_C) > 0 \quad Q_1 = \Delta U_{DA} = C_V(T_A - T_D) < 0$$

Som en kontroll ser vi at for hele prosessen er $\Delta U = Q_{tot} - W_{tot} = Q_1 + Q_2 - W_1 - W_2 = 0$, som den må være for en kretsprosess.

[Velger man den mer tungvinte måten å regne ut W fra $p dV$ -arbeid, vil man med $pV^\gamma = p_B V_1^\gamma$ få:

$$W_2 = \int_{V_2}^{V_1} p_B V_1^\gamma V^{-\gamma} = \dots = \frac{nRT_A}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma - 1} \right),$$

eller liknende ($nRT_A = p_B V_1$). Tilsvarende $W_1 = \frac{nRT_C}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right)$.

Hvis man setter inn fra uttrykkene for temperatuorene under, vil man finne at svarene er de samme.]

Langs adiabatene har vi:

$$T_A \cdot V_2^{\gamma - 1} = T_B \cdot V_1^{\gamma - 1} \quad \text{og} \quad T_C \cdot V_1^{\gamma - 1} = T_D \cdot V_2^{\gamma - 1}.$$

Tilstandslikningene $pV = nRT$ langs isokoren CB gir $T_C/T_B = p_C/p_B = 3,00$. Med $r = V_2/V_1$ gir løsning av disse likningene

$$\underline{T_B = T_A \cdot r^{\gamma - 1}}, \quad \underline{T_C = 3T_A \cdot r^{\gamma - 1}}, \quad \underline{T_D = T_C \cdot r^{1 - \gamma} = 3T_A}.$$

b) Definisjon av η :

$$\eta = \frac{\text{nettoarbeid}}{\text{varmeopptatt}} = \frac{W}{Q_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_2} = 1 + \frac{Q_1}{Q_2}.$$

Vi setter nå inn uttrykkene for Q_1 , Q_2 og temperatuorene T_B , T_C og T_D fra a). For ideell gass er $C_p - C_V = nR$ (kan utledes fra formel på siste side hvis ikke huskes), dvs. $C_p = \frac{7}{2}nR$ og $\gamma = C_p/C_V = 7/5$. Dermed:

$$\eta = 1 + \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B} = 1 + \frac{T_A - 3T_A}{3T_A r^{\gamma - 1} - T_A r^{\gamma - 1}} = 1 - \frac{2}{2r^{\gamma - 1}} = 1 - \frac{1}{r^{\gamma - 1}} = 1 - \frac{1}{10^{2/5}} = \underline{0,60}.$$

Den maksimale virkningsgrad vil en Carnotmaskin mellom reservoarene T_A (lav) og T_C (høy) ha:

$$\eta = 1 - \frac{T_A}{T_C} = 1 - \frac{T_A}{3T_A \cdot r^{\gamma - 1}} = 1 - \frac{1}{3 \cdot 10^{2/5}} = \underline{0,87}.$$

c) Isotermene blir horisontale linjer og adiabatene vertikale i et TS -diagram. Prosessen ABCD samt tilstanden D' er vist til høyre.

Entropiendringen for isoterme CD' med konstant temperatur $T_{D'} = T_C$ er gitt ved

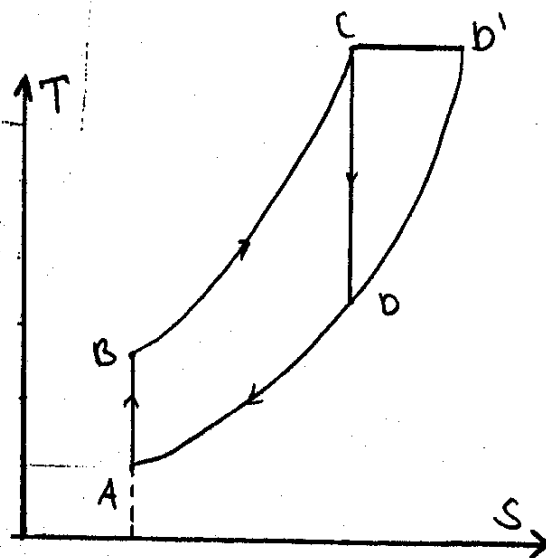
$$\Delta S_{CD'} = \int_C^{D'} \frac{dQ}{T} = \frac{Q_{CD'}}{T_C}$$

For ideell gass er $\Delta U = Q - W = 0$ når temperaturen er konstant, derfor opptas varmen

$$Q_{CD'} = W_{CD'} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} nRT_C dV = nRT_C \ln r$$

Dette gir for entropiendringen:

$$\Delta S_{CD'} = nR \ln r = C_V \frac{2}{5} \ln 10 (\approx 0,92 \cdot C_V)$$



Oppgave 2.

a) Følgende antakelser gir oss mulighet for utledningen under:

- Ser bort fra væskens molare volum: $v_g \gg v_u$.
- Antar dampen følger ideell gasslov: $v_g = V/n = RT/p$.
- Fordampning foregår ved konstant temperatur slik at $s_g - s_u = q/T = l_f/T$.
- Antar fordampningsvarmen l_f er konstant innenfor aktuelt temperaturintervall.

$$\frac{dp}{dT} = \frac{l_f p}{T^2 R} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dT l_f}{T^2 R} \Rightarrow \ln \frac{p}{p_0} = \frac{l_f}{R} \left(-\frac{1}{T} + \frac{1}{T_0} \right)$$

der vi har integrert fra en referansetilstand (p_0, T_0) til en vilkårlig tilstand (p, T) (innenfor temperaturområdet der væske og gass er i likevekt).

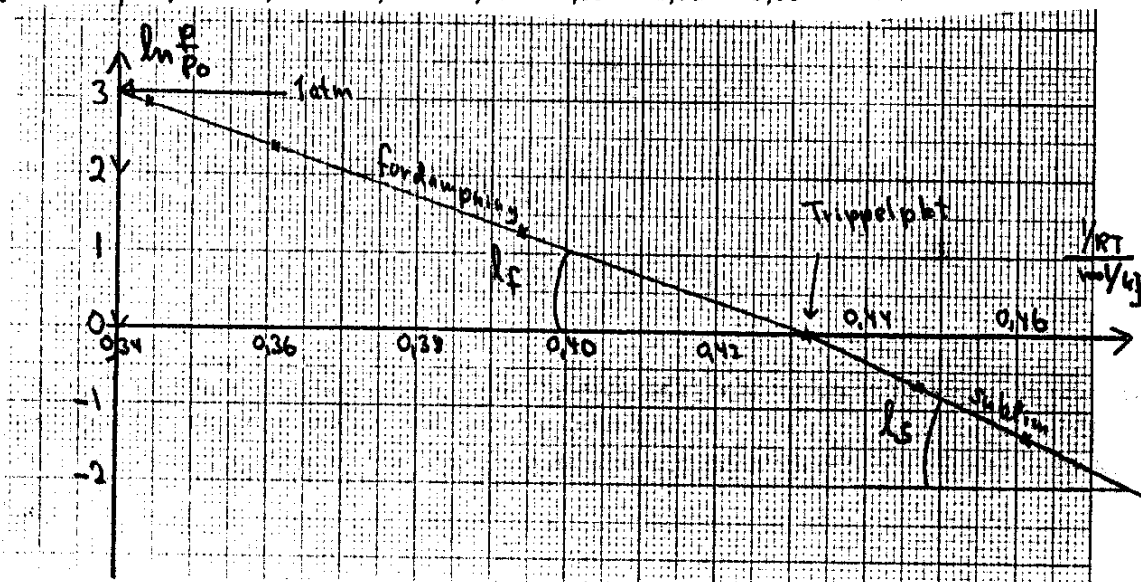
b) For sublimering vil vi med tilsvarende antakelser som ovenfor finne

$$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{l_s}{R} \left(-\frac{1}{T} + \frac{1}{T_0} \right)$$

der l_s er molar sublimeringsvarme (noe større enn l_f fordi den inkluderer smeltevarme).

Ved å plote opp $\ln p/p_0$ som y -akse og $1/RT$ som x -akse skal vi etter teorien få en rett linje med stigningstall $-l_f$ og $-l_s$ henholdsvis for væske og fast benzen. Det er naturlig å velge referansetilstand = trippelpunktet: $p_0 = 4,78$ kPa, men valget har ingen betydning for resultatet. Andre gode valg er $p_0 = 1,0$ kPa eller $p_0 = 1$ atm = 101,3 kPa. Utfylling av tabellen gir:

T (i K)	260,9	269,3	278,68	305,4	333,2	349,8	(kp.)
$1/RT$ (i mol/kJ)	0,461	0,447	0,432	0,394	0,361	0,344	
p (i kPa)	1,27	2,42	4,78	17,5	52,2	91,1	101,3
$\ln p/p_0$	-1,33	-0,68	0,00	1,30	2,39	2,95	3,05



Ved å trekke ei rett linje over og under trippelpunktet finner vi stigningstallene som estimerer fordampningsvarmen og sublimeringsvarmen:

$$l_f = \frac{\Delta(\ln p/p_0)}{\Delta(1/RT)} = \frac{3,1 - 0,0}{(0,34 - 0,432) \text{ mol/kJ}} \approx 34 \text{ kJ/mol.}$$

$$l_s = \frac{\Delta(\ln p/p_0)}{\Delta(1/RT)} = \frac{0,0 - (-2,0)}{(0,432 - 0,475) \text{ mol/kJ}} \approx 46 \text{ kJ/mol.}$$

Kokepunktet estimerer vi ved å løse T fra den integrerte likningen for fordampning: $\frac{1}{T} = \frac{1}{T_0} - \frac{R}{l_f} \ln \frac{p}{p_0}$.

Ved å sette inn $p = 1 \text{ atm} = 101,3 \text{ kPa}$, $p_0 = 4,78 \text{ kPa}$, $T_0 = 278,68 \text{ K}$ og $l_f = 34 \text{ kJ/mol}$ finner vi

$$T \approx 352 \text{ K} \quad (79^\circ\text{C}).$$

Løsningen er også vist grafisk i plottet over.

Oppgave 3. Kvantemekanisk oscillator.

Oscillatorens energinivåer $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ er ikke degenererte, slik at tilstandssummen blir

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n/kT} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})\frac{\hbar\omega}{kT}} = e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\frac{\hbar\omega}{kT}} = e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}$$

der vi har brukt oppgitt formel for geometrisk rekke.

Sannsynligheten for å finne oscillatoren i grunntilstanden ($n = 0$) er da

$$w_0 = \frac{e^{-E_0/kT}}{Z} = \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}}}{Z} = 1 - e^{-\hbar\omega/kT}.$$

Der er like sannsynlig å finne oscillatoren i grunntilstanden som i en eller annen eksitert tilstand når $w_0 = \frac{1}{2}$, som inntreffer for

$$e^{-\hbar\omega/kT} = \frac{1}{2}, \quad \text{altså for} \quad T = \frac{\hbar\omega}{k} \ln 2.$$

Kommentar: Oppgaven kan misforstås slik at grunntilstanden og enhver annen tilstand har samme sannsynlighet, dvs. alle tilstander like sannsynlige. Dette inntreffer kun for uendelig høye temperaturer: $T \rightarrow \infty$.

Oppgave 4.

Strålingstettheten $u(\nu, T)$ må integreres over alle frekvenser ν for å finne den totale indre energien:

$$U/V = u(T) = \int_0^{\infty} u(\nu, T) d\nu = \int_0^{\infty} \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp\{\frac{h\nu}{kT}\} - 1} d\nu$$

Ny integrasjonsvariabel $x = \frac{h\nu}{kT}$ og bruk av oppgitt integral (formelark) gir

$$U = Vu(T) = V \frac{8\pi(kT)^4}{c^3 h^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{8\pi(kT)^4}{c^3 h^3} \frac{\pi^4}{15} = aVT^4,$$

der altså

$$a = \frac{8k^4 \pi^5}{15c^3 h^3} \left(= \frac{\pi^2 k^4}{15 c^3 h^3} \right) = \underline{7,57 \cdot 10^{-16} \text{ Jm}^{-3}\text{K}^{-4}}.$$

Oppgave 5.

Ved stasjonære forhold er effekt utstrålt fra kuleoverflata minus tilbakestråling fra omgivelsene lik generert effekt P . Utstrålt effekt pr. flateenhet følger Stefan-Boltzmanns lov: $j = \epsilon\sigma T^4$ og absorbert effekt følger også $j_{\text{abs}} = \alpha \cdot \sigma T_0^4$. Her er α = absorptansen (absorpsjonsevnen) som for alle legemer er lik emittansen, ϵ , og $T_0 = 300 \text{ K}$ = omgivelsenes temperatur.

Dette gir

$$P = \epsilon\sigma T^4 \cdot 4\pi R^2 - \epsilon\sigma T_0^4 \cdot 4\pi R^2$$

Slik at

$$T^4 = \frac{P}{\epsilon\sigma \cdot 4\pi R^2} + T_0^4 = \frac{100 \text{ W}}{0,10 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{K}^4\text{m}^2) \cdot 4\pi(0,10 \text{ m})^2} + (300 \text{ K})^4 = 1,484 \cdot 10^{11} \text{ K}^4.$$

Som tilslutt gir

$$T = 621 \text{ K} \quad (348^\circ\text{C}).$$

Kommentar: Varmeledningen i kula har ingen betydning for svaret. Riktignok får kulas indre høyere temperatur jo lavere κ er, men dette var ikke spørsmål i oppgaven.

Oppgave 6.

Totalt antall partikler pr. volumenhet, n , er lik integralet over alle mulige \vec{v} , dvs. $\int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z$ i første uttrykk. Da $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ og hastighetene er isotropt fordelt (alle retninger v_x, v_y og v_z likeverdige), får vi

$$n = \int d^3n = C \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-bv_x^2} dv_x \right)^3 = C \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{b}} \right)^3 = C \cdot \left(\frac{\pi}{b} \right)^{3/2}$$

der integralet er løst ved hjelp fra formelarket. Dette gir

$$C = n \cdot \left(\frac{b}{\pi} \right)^{3/2} = n \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2}.$$

Totalt antall partikler pr. volumenhet, n , er også lik integralet over alle mulige retninger θ, ϕ og absoluttverdier, v :

$$n = \int d^3n = C' \int_0^{\infty} v^2 e^{-bv^2} dv \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\phi = C' \cdot \frac{1}{4b^{3/2}} \sqrt{\pi} \cdot 2 \cdot 2\pi = C' \cdot \left(\frac{\pi}{b} \right)^{3/2},$$

(v -integralet fra formelark). Dette gir altså

$$C' = C$$

Videre er

$$\left\langle \frac{1}{v^2} \right\rangle = \frac{C'}{n} \cdot \int_0^{\infty} v^{-2} \cdot v^2 e^{-bv^2} dv \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\phi.$$

Ved å bruke formelark for $\int_0^{\infty} e^{-bv^2} dv$, finner vi

$$\left\langle \frac{1}{v^2} \right\rangle = \frac{C'}{n} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{b}} \cdot 2 \cdot 2\pi = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{2\pi kT}{m}} \cdot 2\pi = \frac{m}{kT}.$$