Eksamen i fag FY1005
Termisk fysikk, 17/12-2007.

Forslag til løsning.

Oppgave 1

a) For å bestemme p_2 trenger en sammenhengen mellom trykk og temperatur langs en adiabat. For ideell gass har en langs adiabater $pV^\gamma = \text{konst}$. Volumet V kan elimineres via $pV = RT$. En finner

$$pV^\gamma = p\left(\frac{RT}{p}\right)^\gamma = p^{1-\gamma}T^\gamma R^\gamma = \text{konst}$$

$$p\,T^{-\alpha} = \text{konst}$$

der $\alpha = \frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{C_p}{C_p - C_V} = \frac{C_p}{R}$. (1 mol)

($C_p = C_V + R$ for ideell gass). En finner så

$$p_1 T_1^{-\alpha} = p_2 T_2^{-\alpha}$$

$$p_2 = p_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^\alpha, \qquad \left(\alpha = \frac{\gamma}{\gamma-1}\right)$$

og tilsvarende

$$p_2 T_3^{-\alpha} = p_1 T_4^{-\alpha}$$

$$p_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^\alpha T_3^{-\alpha} = p_1 T_4^{-\alpha}$$

$$\frac{T_2}{T_1 T_3} = \frac{1}{T_4}$$

$$T_4 = \frac{T_3 T_1}{T_2}$$

b) Oppvarming og avkjøling skjer ved konstant trykk. Tilført varme blir følgelig

$$Q_2 = \int dQ = \int_{T_2}^{T_3} C_p\,dT = C_p(T_3 - T_2)$$

Avgitt varme blir tilsvarende ($Q_1 < 0$)

$$Q_1 = C_p(T_1 - T_4) = C_p\left(T_1 - T_1\frac{T_3}{T_2}\right) = -C_p\frac{T_1}{T_2}(T_3 - T_2).$$

Virkningsgraden blir følgelig

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = \frac{Q_2 + Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{C_p\frac{T_1}{T_2}(T_3 - T_2)}{C_p(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}.$$

c) Likevektstemperaturen er $T_0 = T_1$. Endring i entropi blir

$$\Delta S = S_1 - S_4 = C_V\ln(T_1/T_4) + R\ln(V_1/V_4) =$$

$$C_V\ln(T_1/T_4) + R\ln\left(\frac{RT_1}{p_1}\,\frac{p_1}{RT_4}\right) = C_p\ln(T_1/T_4)$$

Endring i indre energi

$$\Delta U = C_V(T_1 - T_4)$$

Endring i volum ΔV

$$p_1\Delta V = p_1(V_1 - V_4) = R(T_1 - T_4)$$

Maksimalt arbeid blir følgelig

$$W_{max} = T_1\Delta S - \Delta U - p_1\Delta V = C_p\left[T_4 - T_1 - T_1\ln\frac{T_4}{T_1}\right].$$

Oppgave 2

a) Fra $G = U - TS + pV$ finner en først

$$dG = dU - TdS - SdT + pdV + Vdp$$

Dette benyttes så til å eliminere dU i den termodynamiske identitet

$$TdS = dU + pdV$$

som så gir

$$dG = -SdT + Vdp$$

Av dette finner en først

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -S \quad \text{og} \quad \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T = V$$

Ved å derivere 2 ganger finner en så

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)$$

eller

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

Når en erstatter U med $H = U + pV$ i den termodynamiske identitet finnes

$$dH = dU + pdV + Vdp$$

som innsatt gir

$$TdS = dH - Vdp$$

Fra denne likningen følger så

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T - V$$

Ved å benytte Maxwellrelasjonen følger dermed

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = V + T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

b) For Joule-Thompson koeffisienten finner vi

$$\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{-1}{\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial H}\right)_T} = \frac{-1}{C_p}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T$$

Her har vi først benyttet $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_T \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -1$.

Videre er $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z^{-1} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$ benyttet, og til slutt er spesifikk varme ved konstant trykk

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$$

Ved å sette inn resultatet fra punkt a) følger så

$$\mu_{JT} = \frac{1}{C_p}\left[T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V\right]$$

c) Differensiering av tilstandslikningen gir

$$0 = dp = \left(\frac{R}{V} + \frac{dB}{dT}\frac{1}{V^2}\right)dT - \left(\frac{RT}{V^2} + 2\frac{B}{V^3}\right)dV$$

$$T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = V\left(R + \frac{dB}{dT}\frac{1}{V}\right) \Big/ \left(R + 2\frac{B}{TV}\right)$$

og følgelig

$$\mu_{JT} = \frac{1}{C_p}\left(T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V\right)$$

$$= \frac{1}{C_p}V\left(R + \frac{dB}{dT}\frac{1}{V} - R - 2\frac{B}{TV}\right)\Big/\left(R + 2\frac{B}{TV}\right) = \left(\frac{dB}{dT} - \frac{2B}{T}\right)\Big/\left(R + 2\frac{B}{TV}\right)$$

$$\xrightarrow{V \to \infty} \frac{1}{R}\left(\frac{dB}{dT} - \frac{2B}{T}\right)\frac{1}{C_p}$$

Oppgave 3.

a) Med kulesymmetri finner en

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\sin kr}{r}(-Dk^2)e^{-Dk^2t} = \underline{-Dk^2T},$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rT) = a(-k^2)\frac{\sin kr}{r}e^{-Dk^2t} = \underline{-k^2T}$$

Følgelig er den gitte T løsning av $\frac{\partial T}{\partial t} = D\nabla^2 T$.

b) Grensebetingelsen $T = T_\infty$ for $r = R$ innebærer at

$$\sin k_n R = 0$$

eller

$$k_n R = n\pi$$

$$k_n = n\frac{\pi}{R} \quad \text{der } n \text{ er heltall.}$$

c) Med den gitte grensebetingelsen blir koffisientene

$$a_n = \frac{2}{R}T_0\int_0^R r\sin(k_n r)\,dr =$$

$$\frac{2}{R}T_0\Big|_0^R\left(-\frac{r\cos k_n r}{k_n} + \frac{\sin k_n r}{k_n^2}\right) = \frac{2}{R}T_0\left(\frac{-R\cos n\pi}{k_n}\right)$$

$$= \frac{2T_0}{k_n}(-1)^{n-1} = \underline{\underline{\frac{2RT_0}{\pi n}(-1)^{n-1}}}$$

Altså $a_1 = 2RT_0/\pi$.

d) Siden $\lim_{r\to 0}\frac{\sin k_n r}{k_n r} = 1$ har en at

$$T(0,t) - T_\infty = \sum_n a_n k_n e^{-Dk_n t} \xrightarrow[t\to\infty]{} a_1 k_1 e^{-Dk_1 t} = \underline{\underline{2T_0 e^{-Dk_1 t}}}$$

Ved tiden $t = \tau$ har en så

$$T(0,\tau) - T_\infty = 2T_0 e^{-Dk_1^2\tau} = \frac{1}{10}T_0$$

Løst mhp. τ gir dette

$$e^{-Dk_1^2\tau} = \frac{1}{20} = 0{,}05 \quad (\ll 1)$$

$$\tau = \frac{-\ln 0{,}05}{Dk_1^2} = \frac{-\ln 0{,}05}{D}\left(\frac{R}{\pi}\right)^2 = \frac{-\ln 0{,}05}{0{,}0005\,\mathrm{m^2/h}}\left(\frac{0{,}05\,\mathrm{m}}{\pi}\right)^2$$

$$= \underline{1{,}52\,h} \approx \underline{\underline{1\text{ time }31\text{ min}}} = \underline{\underline{5460\,s}}.$$