Eksamen i fag FY1005
Termisk fysikk, den 19/12-2008.

Forslag til løsning.

Oppgave 1.

a) Benytter tilstandslikningen til å bestemme $(\partial V/\partial T)_p$

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T dV =$$

$$\frac{R}{V-b}\,dT - \left(\frac{RT}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^3}\right)dV$$

Dette gir ($dp = 0$)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{R}{V-b}\left[\frac{RT}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^3}\right]^{-1}$$

Videre har en

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V-b}$$

og dermed

$$C_p - C_V = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = T\left(\frac{R}{V-b}\right)^2\left[\frac{RT}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^3}\right]^{-1}$$

$$= \underline{\underline{\frac{R}{1 - \frac{2a}{V^3}\frac{(V-b)^2}{RT}}}}$$

b) Når gassen presses gjennom en porøs plugg er enthalpien bevart. For Van der Waals gassen er denne

$$H = U + pV = C_V T - \frac{a}{V} + \frac{RTV}{V-b} - \frac{a}{V^2}V$$

$$= \left(C_V + R\frac{V}{V-b}\right)T - \frac{2a}{V}$$

Med $H_s = H_0$ bestemmes nå slutt-temperaturen T_s av ($V_s = \infty$)

$$(C_V + R)\,T_s = \left(C_V + R + R\frac{b}{V_0 - b}\right)T_0 - \frac{2a}{V_0}$$

$$\frac{5}{2}R\,T_s = \left(\frac{5}{2} + \frac{b}{V_0 - b}\right)RT_0 - \frac{2a}{V_0}$$

$$T_s = \left(1 + \frac{2}{5}\frac{b}{V_0 - b}\right)T_0 - \frac{2a}{RV_0}\frac{2}{5} =$$

$$\left(1 + \frac{2}{5}\frac{1}{5-1}\right)\frac{a}{2Rb} - \frac{2a}{5Rb}\frac{2}{5} = \left[\left(1 + \frac{1}{10}\right)\frac{1}{2} - \frac{4}{25}\right]\frac{a}{Rb}$$

$$= \underline{\underline{0{,}39\,\frac{a}{Rb}}}$$

Oppgave 2.

a) Likevektsbetingelsene for et system i termisk likevekt er at temperatur, trykk og kjemisk potensial er konstante over systemet.

Ved likevekt vil det kjemiske potensialet for oppløsningsmidlet være det samme på begge sider av membranen, dvs.

$$\mu(p+\Delta p, T, x) = \mu^\circ(p,T).$$

Molbrøken x av tilsatt stoff antas liten slik at kjemisk potensial for ideell blanding kan benyttes.

$$\mu(p+\Delta p,T,x) = \mu^\circ(p+\Delta p,T) + kT\ln(1-x)$$

der μ° er kjemisk potensial for rent oppløsningsmiddel. Utvikler nå om trykket p og finner

$$\mu^\circ(p+\Delta p,T) = \mu^\circ(p,T) + \Delta p \left(\frac{\partial \mu^\circ}{\partial p}\right)_T + \cdots$$

$$= \mu^\circ(p,T) + v\,\Delta p + \cdots$$

der v er volum pr. partikkel

$$v = \left(\frac{\partial\mu^\circ}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial G^\circ}{\partial N}\right)_T = V/N.$$

[Har at $\mu^\circ = G^\circ/N$ for rent stoff.]

Ved å sette inn i likevektsbetingelsen ovenfor ser en at $\mu^\circ(p,T)$ kanselerer og en finner

$$0 = \Delta p\, v + kT\ln(1-x)$$

$$\Delta p = -\frac{kT}{v}\ln(1-x) \approx \frac{kT}{v}x \quad (\text{små } x)$$

Nå er $x = N_x/N = N_A n/N$ der N er det totale antall molekyl, N_x og n en henholdsvis antall molekyl og antall mol oppløst stoff og N_A er Avogadros tall. Videre er så $R = N_A k$ og $V = vN$ er volumet. Resulterende osmotisk trykk blir

$$\Delta p = \frac{kT}{v}\frac{N_A n}{N} = \underline{\underline{\frac{RT}{V} n}}.$$

b) Effekten som tas ut blir

$$P = \Delta p\cdot\Phi = (\Delta p_0 - \Delta p_t)\Phi = \underline{(\Delta p_0 - \lambda\Phi)\Phi}$$

Maksimal effekt bestemmes ved derivering

$$0 = \frac{dP}{d\Phi} = \Delta p_0 - 2\lambda\Phi_m$$

$$\lambda = \underline{\frac{\Delta p_0}{2\Phi_m}}$$

Dette gir

$$P_m = \left(\Delta p_0 - \frac{\Delta p_0}{2\Phi}\Phi\right)\Phi = \frac{1}{2}\Delta p_0 \Phi_m.$$

Vannstrømmen ved maksimal effekt blir følgelig

$$\Phi_m = \frac{2P_m}{\Delta p_0} = \frac{2\cdot 85\cdot 10^3\ J/s}{21\cdot 10^5\ Nm/m^3} = 0{,}081\ m^3/s = \underline{\underline{81\ dm^3/s}}.$$

Oppgave 3.

a) Med kulesymmetri finner en

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\sin kr}{r}(-Dk^2)e^{-Dk^2t} = \underline{-Dk^2T,}$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rT) = a(-k^2)\frac{\sin kr}{r}e^{-Dk^2t} = \underline{-k^2T}$$

Følgelig er den gitte T løsning av $\frac{\partial T}{\partial t} = D\nabla^2 T$.

b) Grensebetingelsen $T = T_\infty$ for $r = R$ innebærer at

$$\sin k_n R = 0$$

eller

$$k_n R = n\pi$$

$$k_n = n\frac{\pi}{R} \quad \text{der } n \text{ er heltall.}$$

c) Med den gitte grensebetingelsen blir koffisientene

$$a_n = \frac{2}{R}T_0\int_0^R r\sin(k_n r)\,dr =$$

$$\frac{2}{R}T_0\Big|_0^R\left(-\frac{r\cos k_n r}{k_n} + \frac{\sin k_n r}{k_n^2}\right) = \frac{2}{R}T_0\left(\frac{-R\cos n\pi}{k_n}\right)$$

$$= \frac{2T_0}{k_n}(-1)^{n-1} = \underline{\underline{\frac{2RT_0}{\pi n}(-1)^{n-1}!}}$$

Altså $a_1 = 2RT_0/\pi$.

d) Siden $\lim_{r\to 0}\frac{\sin k_n r}{k_n r} = 1$ har en at

$$T(0,t) - T_\infty = \sum_n a_n k_n e^{-Dk_n t} \xrightarrow[t\to\infty]{} a_1 k_1 e^{-Dk_1 t}$$

$$= \underline{2T_0 e^{-Dk_1 t}}$$

Ved tiden $t = \tau$ har en så

$$T(0,\tau) - T_\infty = 2T_0 e^{-Dk_1^2\tau} = \frac{1}{10}T_0$$

Løst mhp. τ gir dette

$$e^{-Dk_1^2\tau} = \frac{1}{20} = 0{,}05 \quad (\ll 1)$$

$$\tau = \frac{-\ln 0{,}05}{Dk_1^2} = \frac{-\ln 0{,}05}{D}\left(\frac{R}{\pi}\right)^2 = \frac{-\ln 0{,}05}{0{,}0005\,\mathrm{m^2/h}}\left(\frac{0{,}05\,\mathrm{m}}{\pi}\right)^2$$

$$= \underline{1{,}52\,\mathrm{h}} \approx \underline{\underline{1\ \text{time}\ 31\ \text{min}}} = \underline{5460\,\mathrm{s}}.$$