SIF4016 **Fysikk 4**

Løsningsforslag for Eksamen 15. mai 2000.

Oppgave 1.

a) Idealgass, isoterm prosess: $p_1V_1 = \mathtt{N}RT_1 = p_2V_2$.

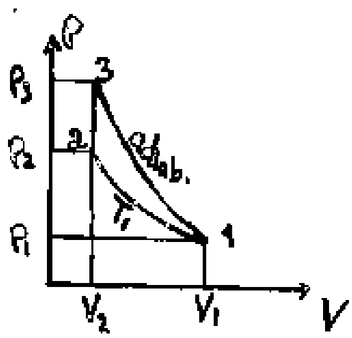
i) $\underline{\underline{\Delta U = 0\ \mathrm{J}}}$, fordi U kun avhengig T for ideell gass, og her er T konstant,

ii) $\Delta H = H_2 - H_1 = U_2 - U_1 + p_2V_2 - p_1V_1 = \Delta U + \mathtt{N}RT_1 - \mathtt{N}RT_1 = \underline{\underline{0\ \mathrm{J}}}$,

iii) $\Delta S = \int_{V_1}^{V_2} \text{đ}Q_{\text{rev}}/T_1$. 1.hovedsetning med $\Delta U = 0$ gir
$\text{đ}Q_{\text{rev}} = \text{đ}W = p\mathrm{d}V = (\mathtt{N}RT_1/V)\cdot \mathrm{d}V$, slik at: $\underline{\underline{\Delta S}} = \frac{1}{T_1}\cdot \mathtt{N}RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \mathrm{d}V/V = \underline{\underline{\mathtt{N}R \ln V_2/V_1}}$,

iv) $\underline{\underline{\Delta G}} = \Delta H - \Delta(T_1S) = 0 - T_1\Delta S = \underline{\underline{-\mathtt{N}RT_1 \ln V_2/V_1}}$.

b) Beregning av p_3 baseres på adiabaten 3-1:



$$p_3V_2^\gamma = p_1V_1^\gamma \quad \Rightarrow \quad p_3 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma = \frac{\mathtt{N}RT_1}{V_1}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma = \underline{\underline{\mathtt{N}RT_1\frac{V_1^{\gamma-1}}{V_2^\gamma}}}$$

Tilhørende T_3 bestemt fra ideell gasslov:

$$T_3 = \frac{p_3V_2}{\mathtt{N}R} = \frac{1}{\mathtt{N}R}\mathtt{N}RT_1\frac{V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}} = \underline{\underline{T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}}}.$$

p_1 skal ikke inngå i uttrykkene. I grafen kreves rett kurveform (krumning) for de ulike delprosesser.

c) Arbeidet i den isokore prosessen er null slik at $W = W_{12} + W_{31}$.

$$W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V = \mathtt{N}RT_1\int_{V_1}^{V_2}\frac{\mathrm{d}V}{V} = \mathtt{N}RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}.$$

For adiabaten 3-1 er $pV^\gamma = p_1V_1^\gamma = p_3V_2^\gamma$, slik at

$$W_{31} = \int_{V_2}^{V_1} p\mathrm{d}V = p_1V_1^\gamma \cdot \int_{V_2}^{V_1} V^{-\gamma}\mathrm{d}V = p_1V_1^\gamma\cdot\frac{1}{1-\gamma}\left[V_1^{1-\gamma} - V_2^{1-\gamma}\right]$$

$$= \frac{1}{1-\gamma}\left[p_1V_1^\gamma\cdot V_1^{1-\gamma} - p_3V_2^\gamma\cdot V_2^{1-\gamma}\right] = \frac{1}{1-\gamma}\left[p_1V_1 - p_3V_2\right] = \frac{1}{\gamma-1}\left[\mathtt{N}RT_3 - \mathtt{N}RT_1\right]$$

Dermed:

$$\underline{\underline{W = W_{12} + W_{31} = \mathtt{N}RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} + \frac{1}{\gamma-1}\mathtt{N}R(T_3 - T_1).}}$$

der $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{7/2}{5/2} = \frac{7}{5}$ for toatomig gass (ikke nødvendig å beregne). Merk alternativt uttrykk:

$$\frac{1}{\gamma-1}\mathtt{N}R = \frac{C_V}{C_p - C_V}\mathtt{N}R = \frac{C_V}{\mathtt{N}R}\mathtt{N}R = C_V$$

Svaret skulle uttrykkes med γ, men C_V og $\mathtt{N}R$ godtas også. Men ingen trykk p skal inngå i svaret. Det er mange alternative former for W_{31}, f.eks.:

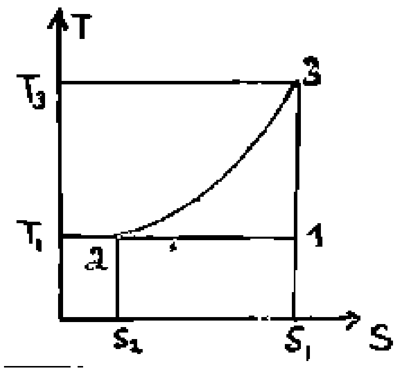
$$W_{31} = C_VT_1\left((V_2/V_1)^{1-\gamma} - 1\right) = C_VT_1\left((V_1/V_2)^{\gamma-1} - 1\right) = C_VT_3\left(1 - (V_1/V_2)^{1-\gamma}\right)$$

Alternativ beregning:
1. lov for en hel syklus gir $0 \equiv \Delta U = Q - W$. Vi beregner varmer for hver delprosess, der vi allerede har funnet Q_{12} i a-iii) og resten er enkelt:

$$W = Q_{12} + Q_{23} + Q_{31} = \mathtt{N}RT_1 \ln V_2/V_1 + C_V\cdot(T_3 - T_1) + 0$$

d) For prosess 23 gjelder: $đQ = T\mathrm{d}S$ og $đQ = C_V \mathrm{d}T$. Gir integrert:

$$\int_{S_2}^{S} \mathrm{d}S = C_V \int_{T_1}^{T} \mathrm{d}T/T \quad \Rightarrow \quad S - S_2 = C_V \ln \frac{T}{T_1}$$
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{T(S) = T_1 \cdot \exp\left\{\frac{S - S_2}{C_V}\right\}}}.$$



For toatomig gass er $C_V = \frac{5}{2}\mathtt{N}R$, men det var ikke meningen å settes inn. I grafen kreves rett kurveform (krumning) for de ulike delprosesser.

Kontroll:

$$T_3 = T(S_1) = T_1 \cdot \exp\left\{\frac{S_1 - S_2}{C_V}\right\}$$

$S_1 - S_2 = -\Delta S$ fra a) settes inn, og bruk av $\mathtt{N}R = C_p - C_V = C_V(\gamma - 1)$ gir samme svaret som i b):

$$T_3 = T_1 \cdot \exp\left\{\frac{-\mathtt{N}R \ln V_2/V_1}{C_V}\right\} = T_1 \cdot \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\gamma}$$

Oppgave 2.

* Enatomig ideell gass har tre frihetsgrader: translasjon i tre retninger. Da er $U = \frac{3}{2}\mathtt{N}RT$ og $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{2}\mathtt{N}R$. Derfor:

$$\xi = \frac{C_V T}{pV} = \frac{\frac{3}{2}\mathtt{N}RT}{pV} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}.$$

* Fotongass har (oppgitt formelark) $U = VaT^4$, slik at $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = 4VaT^3$. Videre er $p = \frac{a}{3}T^4$ (formelark), slik at

$$\xi = \frac{C_V T}{pV} = \frac{4VaT^3 \cdot T}{\frac{a}{3}T^4 V} = \underline{\underline{12}}.$$

Oppgave 3.

Antall partikler $\mathrm{d}j$ med fart mellom v og $v + \mathrm{d}v$ som unnslipper pr. tids- og flateenhet er lik oppgitt støttall: $\mathrm{d}j = \frac{n}{4} v f(v) \mathrm{d}v$.

Totalt antall som slipper ut uansett fart ved å integrere over alle mulige v (var også oppgitt):

$$j = \frac{n}{4}\int_0^\infty v f(v)\mathrm{d}v = \frac{n}{4}\langle v\rangle \qquad \left(= \frac{n}{4}\sqrt{\frac{4}{\pi b}} = n\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}\right)$$

Brøkdelen av partikler som slipper ut med fart mellom v og $v + \mathrm{d}v$ er derfor

$$\frac{\mathrm{d}j}{j} = \frac{v f(v)\mathrm{d}v}{\langle v\rangle} = f_{\mathrm{ut}}(v)\mathrm{d}v$$

der $f_{\mathrm{ut}}(v)$ er den søkte fordelingsfunksjonen for unnslippende partikler. Det er for enkelt å avslutte her, man må finne eksplisitt uttrykk ved å sette inn oppgitte formler for Maxwellfordeling med $b = \frac{m}{2kT}$:

$$f_{\mathrm{ut}}(v) = \frac{v}{\langle v\rangle} f(v) = v\sqrt{\frac{\pi b}{4}}\, 4\pi v^2 \left(\frac{b}{\pi}\right)^{3/2} \exp\{-bv^2\} = \underline{\underline{2b^2 v^3 \exp\{-bv^2\}}} \qquad \left(= \frac{1}{2}\left(\frac{m}{kT}\right)^2 v^3 \exp\left\{-\frac{mv^2}{2kT}\right\}\right)$$

Da blir

$$E = \langle E_k\rangle_{\mathrm{ut}} = \left\langle \frac{1}{2}mv^2\right\rangle_{\mathrm{ut}} = \frac{1}{2}m\int_0^\infty v^2 v^3 2b^2 \exp\{-bv^2\}\mathrm{d}v = mb^2\frac{1}{b^3} = \frac{m}{b} = \underline{\underline{2kT}}.$$

der oppgitte tabeller er brukt til å beregne integralet.

Oppgave 4.

a) I Fouriers lov $\dot{Q} = -\kappa \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} A$ er ved stasjonære forhold $\dot{Q}$, κ og A konstant, da må temperaturgradienten også være konstant, og lik $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = \frac{T_V - T_k}{l}$. Vi få da

$$\dot{Q} = -\kappa \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} A = -0,100 \, \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K} \cdot \mathrm{m}} \cdot \frac{100 \, \mathrm{K}}{0,050 \, \mathrm{m}} \cdot 40,0 \cdot 10^{-3} \, \mathrm{m}^2 = 8,00 \, \mathrm{J/s} = 480 \, \mathrm{J/min}.$$

Denne varmestrømmen smelter is:

$$\Delta m = \frac{\dot{Q}}{l_{\mathrm{sm}}} = \frac{8,00 \, \mathrm{J/s}}{335 \, \mathrm{kJ/kg}} = 0,0239 \, \mathrm{g/s} = \underline{\underline{1,43 \, \mathrm{g/min}}}.$$

b) Temperaturen er konstant i reservoarene slik at entropiendring ganske enkelt er lik varme (med fortegn) dividert med temperaturen. Det er viktig at fortegnet på entropien er riktig (totalentropien skal øke for denne irreversible prosessen!)

$$\begin{aligned}
\Delta S_{\mathrm{varm}} &= \frac{Q}{T_{100}} = \frac{-480 \, \mathrm{J}}{373 \, \mathrm{K}} = \underline{\underline{-1,287 \, \mathrm{J/K}}} \\
\Delta S_{\mathrm{kald}} &= \frac{Q}{T_0} = \frac{480 \, \mathrm{J}}{273 \, \mathrm{K}} = \underline{\underline{1,758 \, \mathrm{J/K}}} \\
\Delta S_{\mathrm{gass}} &= \underline{\underline{0 \, \mathrm{J/K}}} \\
\Delta S_{\mathrm{tot}} &= (1,758 - 1,287) \, \mathrm{J/K} = \underline{\underline{0,471 \, \mathrm{J/K}}}.
\end{aligned}$$

Kommentar til ΔS_{gass}: Gassen endrer ikke tilstand, og siden S er en tilstandsfunksjon endres heller ikke S for gassen.

c) Varmestrømmen $\dot{Q}$ er konstant gjennom hele gasslaget. Bruk av Fouriers lov gir

$$\dot{Q} = -\kappa(T) \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} A = -\frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{kT}{\pi m}} \cdot \frac{C_V}{\sigma} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} A = \text{konstant}$$

Trekker alle konstante størrelser inn i en konstant K og integrerer med z = avstanden fra det varme reservoaret:

$$\sqrt{T} \mathrm{d}T = K \cdot \mathrm{d}z \quad \overset{\text{integrert}}{\Rightarrow} \quad \frac{2}{3} T^{3/2} = K \cdot z + K'$$

Eller, med nye konstanter:

$$T^{3/2} = A \cdot z + B$$

Grensebetingelser bestemmer A og B:

$$\begin{aligned}
T(z = 0) = T_v \quad &\Rightarrow \quad B = T_v^{3/2} \\
T(z = l) = T_k \quad &\Rightarrow \quad T_k^{3/2} = A \cdot l + T_v^{3/2} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{l} \cdot \left(T_k^{3/2} - T_v^{3/2} \right)
\end{aligned}$$

$$\text{Dvs.} \qquad \underline{T^{3/2} = \frac{z}{l} \cdot \left(T_k^{3/2} - T_v^{3/2} \right) + T_v^{3/2}}$$

Midt i luftlaget blir temperaturen

$$\begin{aligned}
T(z = l/2) &= \left(\frac{1}{2} \cdot \left((273 \, \mathrm{K})^{3/2} - (373 \, \mathrm{K})^{3/2} \right) + (373 \, \mathrm{K})^{3/2} \right)^{2/3} \\
&= \left(\frac{1}{2} \cdot (273 \, \mathrm{K})^{3/2} + \frac{1}{2} \cdot (373 \, \mathrm{K})^{3/2} \right)^{2/3} = \underline{\underline{324,9 \, \mathrm{K} \quad (51,8 \, {}^\circ\mathrm{C})}}
\end{aligned}$$

Merk at denne temperaturen er helt uavhengig av konstantene som inngår i uttrykket for κ, det er bare selve temperaturavhengigheten som har betydning, i tillegg til temperaturene på grenseflatene.

Karakterstatistikk:

110 kandidater, 9 ikke møtt

1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	Totalt	Middel (uten 6,0)
11	18	20	18	14	11	4	3	2	0	0	101	2,41

Middelkarakter for de ulike oppgavene (fra faglærers bedømmelse):

1a	1b	1c	1d	2	3	4a	4b	4c
1,8	1,4	1,6	3,0	2,1	3,9	1,5	2,9	3,7

Oppgavesettet må betraktes som relativt enkelt, selv om mange hadde problemer med oppgavene 3 (noe overraskende) og 4c.

A.M. 2. juni 2000