Institutt for fysikk 2002

SIF4016 **Termisk fysikk/Fysikk 4**
Løsningsforslag Eksamen 25. mai 2002.

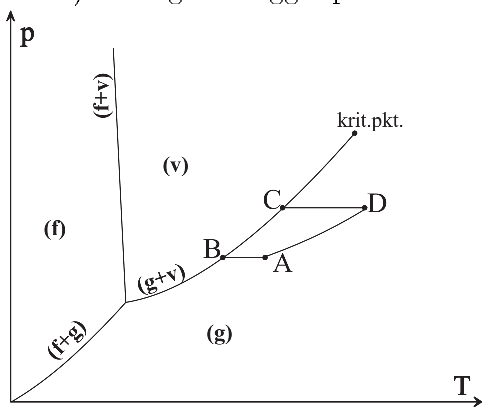
Tallsvar som brukes i videre regning er oppgitt med noen flere sifre enn et endelig svar bør oppgis i. Noen flere figurer/grafer enn brukt her i løsningsforslaget vil gjøre seg meget bra.

Oppgave 1.

a) Dampen som ideell gass gir:

$$\begin{aligned} \mathtt{N} &= \frac{p_A V_A}{RT_A} \\ &= \frac{47,37\ \mathrm{kN/m^2} \cdot 50,0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3}}{8,31\ \mathrm{JK^{-1}mol^{-1}} \cdot 570\ \mathrm{K}} \\ &= \underline{\underline{0,500\ \mathrm{mol}}}. \end{aligned}$$

b) BB' og CD' ligger på sameksistenskurva (g+v)



c) For å få isobar kompresjon av gassen må temperaturen senkes. Doggpunktet nås når trykket $p_A = p_B = 47,37$ kPa er likt metningstrykket, som ifølge tabellen er ved 80 °C, dvs. $\underline{\underline{T_{B'} = 353\ \mathrm{K}}}$. Ved denne temperaturen har dampen et volum:

$$V_{B'} = \frac{\mathtt{N}R}{p_{B'}} T_{B'} = \frac{0,500\ \mathrm{mol} \cdot 8,31\ \mathrm{JK^{-1}mol^{-1}}}{47,37\ \mathrm{kN/m^2}} \cdot 353\ \mathrm{K} = \underline{\underline{31,0\ \mathrm{dm^3}}}.$$

Ved videre komprimering B'A vil damp kondenseres ved konstant temperatur. Derfor er $\underline{\underline{T_B = T_{B'} = 353\ \mathrm{K}\quad (80\ °\mathrm{C})}}$.

Evt. utregning: $T_B = \frac{p_B V_B}{\mathtt{N}_{\mathrm{damp,B}} R} = 353$ K, men da må $\mathtt{N}_{\mathrm{damp,B}} = 0{,}0807$ mol bestemmes i d) først.

d)

$$\mathtt{N}_{\mathrm{damp,B}} = \frac{p_B V_B}{T_B R} = \frac{47,37\ \mathrm{kN/m^2} \cdot 5,00 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3}}{353\ \mathrm{K} \cdot 8,31\ \mathrm{JK^{-1}mol^{-1}}} = 0,0807\ \mathrm{mol}.$$

Dvs. kondensert vann: $\mathtt{N}_{\mathrm{vann,B}} = \mathtt{N} - \mathtt{N}_{\mathrm{damp,B}} = \underline{\underline{0,419\ \mathrm{mol}}}$, som har volum:

$$V_{\mathrm{vann,B}} = \frac{m_{\mathrm{vann,B}}}{\rho_{\mathrm{vann}}} = \frac{\mathtt{N}_{\mathrm{vann,B}} \cdot M_w}{\rho_{\mathrm{vann}}} = \frac{0,419\ \mathrm{mol} \cdot 18 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg/mol}}{0,96\ \mathrm{kg/dm^3}} = \underline{\underline{7,86 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{dm^3}}}.$$

Dette er neglisjerbart i forhold til gassvolumet 5,00 $\mathrm{dm^3}$

e) Clausius-Clapeyrons likning som oppgitt i formelark. Videre antatt $v_g \gg v_v$ og $v_g = RT/p$ (ideell gass):

$$\frac{dp}{dT} = \frac{l_f}{T(v_g - v_v)} = \frac{l_f}{RT^2} \cdot p$$

Dermed er ved temperatur $T_B = 353$ K (80°C) og $p_B = 47{,}37$ kPa:

$$l_f = \left.\frac{dp}{dT}\right|_{T_B} \cdot \frac{RT_B^2}{p_B} = \frac{57,82\ \mathrm{kPa} - 38,56\ \mathrm{kPa}}{10\ \mathrm{K}} \cdot \frac{8,31\ \mathrm{JK^{-1}mol^{-1}}(353\ \mathrm{K})^2}{47,37\ \mathrm{kPa}} = \underline{\underline{42,1\ \mathrm{kJ/mol}}}.$$

der gradienten $\left.\frac{dp}{dT}\right|_{T_B}$ er estimert fra tabellverdier for 75 K og 85 K (det optimale).

Molare gassvolum ved 80 °C kan istedenfor $v_g = RT/p$ bestemmes fra tilstand B eller B' (80°C):
$v_g = \frac{5{,}0\ \mathrm{dm^3}}{0{,}0807\ \mathrm{mol}} = \frac{31{,}0\ \mathrm{dm^3}}{0{,}5\ \mathrm{mol}} = 62{,}0\ \mathrm{dm^3}$. Videre som over: $l_f = \left.\frac{dp}{dT}\right|_{T_B} \cdot T_B \cdot v_g = 42,1$ kJ/mol.

f) I tilstand D er $V_\mathrm{D} = V_\mathrm{A} = 50,0\ \mathrm{dm}^3$ og alt stoff damp.

$$T_\mathrm{D} = \frac{p_\mathrm{D} V_\mathrm{D}}{\mathtt{N} R} = \frac{143,2\ \mathrm{kPa} \cdot 50,0\ \mathrm{dm}^3}{0,5 \cdot 8,31\ \mathrm{J/K}} = \underline{\underline{1723\ \mathrm{K}}}.$$

La D' være tilstanden der akkurat all væsken er fordampet. Prosessen CD' er isoterm fordampning slik at

$$\Delta S_{\mathrm{CD}'} = \frac{Q}{T_\mathrm{C}} = \frac{l_\mathrm{f} \cdot \mathtt{N}_\mathrm{vann,C}}{T_\mathrm{C}} = \frac{41\ \mathrm{kJ\,mol^{-1}} \cdot 0,419\ \mathrm{mol}}{383\ \mathrm{K}} = \underline{44,85\ \mathrm{J/K}} \quad (\mathtt{N}_\mathrm{vann,C} = 0,40 \text{ gir } \underline{42,82\ \mathrm{J/K}}).$$

For prosessen D'D kan vi enten bruke definisjonen

$$\Delta S_{\mathrm{D'D}} = \int_D^{D'} \frac{đQ}{T} = C_p \int_D^{D'} \frac{\mathrm{d}T}{T} = C_p \ln \frac{T_D}{T_{D'}}$$

eller oppgitt entropiuttrykk for ideell gass:

$$S(p,T) = S_0 + C_p \ln \frac{T}{T_0} - \mathtt{N} R \ln \frac{p}{p_0}$$

I begge tilfeller får vi (idet $p_{\mathrm{D}'} = p_\mathrm{D}$):

$$\Delta S_{\mathrm{D'D}} = C_p \ln \frac{T_\mathrm{D}}{T_{\mathrm{D}'}} = 34\ \mathrm{JK^{-1}mol^{-1}} \cdot 0,5\ \mathrm{mol} \cdot \ln \frac{1724}{383} = \underline{25,57\ \mathrm{J/K}},$$

$$\Delta S_\mathrm{CD} = \Delta S_{\mathrm{CD}'} + \Delta S_{\mathrm{D'D}} = \underline{\underline{70,4\ \mathrm{J/K}}} \quad (\mathtt{N}_\mathrm{vann,C} = 0,40 \text{ mol gir } \underline{\underline{68,4\ \mathrm{J/K}}}).$$

Oppgave 2.

a)

$$j = -\kappa \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -3\ \mathrm{W/(Km)} \cdot (-20\ \mathrm{K/km}) = \underline{\underline{60 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{J/(sm^2)}}}.$$

Jordas overflateareal er $A = 4\pi \cdot R_0^2 = 4\pi \cdot (6400\ \mathrm{km})^2 = 5,15 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m}^2$, slik at total varmefluks blir

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \dot{Q} = j \cdot A = 3,09 \cdot 10^{13}\ \mathrm{J/s} = \underline{\underline{30,9\ \mathrm{TW}}} \qquad (\text{positiv i positiv } x\text{-retning}).$$

[PS. Dette på jordoverflata. Innover i skallet er arealet A mindre og dermed utregnet $\dot{Q}$ mindre (28,5 TW ved R_i). Dette er en følge av at vi har approksimert til konstant temperaturgradient i den "tynne" jordskorpa. I realiteten er $\dot{Q}$ konstant mens j, og dermed også temperaturgraidenten, øker noe innover.]

b) Temperaturen i jordas indre $T_\mathrm{i} = T_0 + 20\ \mathrm{K/km} \cdot 250\ \mathrm{km} = \underline{\underline{5273\ \mathrm{K}}}$ med $T_0 = 273$ K.

Den indre jernkula har varmekapasitet:

$$C = m \cdot c_s = \rho V \frac{c_p}{M_W} = 7900\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot \frac{4\pi}{3} (6150\ \mathrm{km})^3 \cdot \frac{25\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K \cdot mol}}}{55,9 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg/mol}} = 3,44 \cdot 10^{27}\ \mathrm{J/K}.$$

T_i avtar når $\dot{Q}$ er positiv (varmestrøm utover):

$$-\dot{Q} = C \cdot \dot{T}_\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad \dot{T}_\mathrm{i} = \frac{-\dot{Q}}{C} = \frac{-3,09 \cdot 10^{13}\ \mathrm{J/s}}{3,44 \cdot 10^{27}\ \mathrm{J/K}} = \underline{-8,98 \cdot 10^{-15} \mathrm{K/s}} = \underline{\underline{-2,83 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{K/år}}}.$$

c) Etterhvert vil altså $T_\mathrm{i}(t)$ avta. Temperaturgradienten $\mathrm{d}T/\mathrm{d}r = (T_0 - T_\mathrm{i}(t))/\Delta R$ i jordskorpa med tykkelse ΔR vil også etterhvert avta. Vi får derfor en differensiallikning med randvilkår $T_\mathrm{i}(0) = 5273$ K og jordoverflatas temperatur $T_0 = 273$ K = konstant. Vi skal finne t_1 der $T_\mathrm{i}(t_1) = 1000$ K.

Vi setter inn $\dot{Q} = -\kappa \cdot \mathrm{d}T/\mathrm{d}r \cdot A$ i likningen fra b) og får:

$$\dot{T}_\mathrm{i} = \frac{\mathrm{d}T_\mathrm{i}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{-\dot{Q}}{C} = -\kappa \cdot \frac{T_\mathrm{i}(t) - T_0}{\Delta R} \cdot \frac{A}{C} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}T_\mathrm{i}(t)}{T_\mathrm{i}(t) - T_0} = -\frac{\mathrm{d}t}{\tau},$$

der tidskonstanten

$$\tau = \frac{\Delta R}{\kappa}\frac{C}{A} = \frac{250\ \text{km}}{3,0\ \text{J/s}} \cdot \frac{3,44 \cdot 10^{27}\ \text{J/K}}{5,15 \cdot 10^{14}\ \text{m}^2} = 5,57 \cdot 10^{17}\ \text{s} = 1,77 \cdot 10^{10}\ \text{år}$$

Integrering $\int_{t=0}^{t}$ av diff.likningen og innsetting grensevilkår gir:

$$\ln\frac{T_\text{i}(t) - T_0}{T_\text{i}(0) - T_0} = -\frac{t-0}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{1000\ \text{K} - 273\ \text{K}}{5273\ \text{K} - 273\ \text{K}} = -\frac{t_1}{\tau}$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = -\tau \cdot \ln\frac{1000\ \text{K} - 273\ \text{K}}{5273\ \text{K} - 273\ \text{K}} = 5,57 \cdot 10^{17}\ \text{s} \cdot 1,928 = \underline{1,07 \cdot 10^{18}\ \text{s}} = \underline{34 \cdot 10^9\ \text{år}} = \underline{\text{34 milliarder år}}.$$

Dersom man antar konstant energitransport lik den i b) vil man finne at det tar følgende tid å kjøle 4723 K: $4273\ \text{K}/2,83 \cdot 10^{-7}\ \text{K/år} = 15 \cdot 10^9$ år. Man får selvsagt for kort tid, noe man bør kommentere dersom man velger denne lettvinte utregningen som ikke kan godkjennes fullt ut.

d) Ved stasjonære forhold transporteres all varmefluks ut fra jorda ved stråling fra sort legeme ifølge Stephan-Boltzmanns lov:

$$j = \sigma T_0^4 \quad \Leftrightarrow \quad T_0^4 = \frac{j}{\sigma} = \frac{60 \cdot 10^{-3}\ \text{W/m}^2}{5,67 \cdot 10^{-8}\ \text{W/(m}^2\text{K}^4)} = 1,058 \cdot 10^6\ \text{K}^4.$$

Dette gir oss jordoverflatetemperaturen

$$\underline{\underline{T_0 = 32,1\ \text{K}}}.$$

e) Flukstetthet fra sola $j_\text{inn} = 1,40\ \text{kW/m}^2$ mottas av jorda med en flate lik $A_\text{inn} = \pi \cdot R_0^2 = 1,29 \cdot 10^{14}\ \text{m}^2$ (sirkelflate sett fra sola). Dvs. innstrålt fluks er $\dot{Q}_\text{inn} = j_\text{inn} \cdot A_\text{inn}$. Utstrålt fluks er $\dot{Q}_\text{ut} = j_\text{ut} \cdot A_\text{ut} = \sigma T_0^4 \cdot A_\text{ut}$, der $A_\text{ut} = 4\pi R_0^2$ = arealet av hele jordkloden.

Ved likevekt er innstråling lik utstråling:

$$\dot{Q}_\text{inn} = \dot{Q}_\text{ut} \quad \Leftrightarrow \quad j_\text{inn} \cdot A_\text{inn} = j_\text{ut} \cdot A_\text{ut} \quad \Leftrightarrow \quad j_\text{inn} \cdot \pi \cdot R_0^2 = \sigma T_0^4 \cdot 4\pi R_0^2$$

Da får vi jordtemperaturen

$$T_0 = \left(\frac{j_\text{inn}}{4\sigma}\right)^{0,25} = \left(\frac{1,40 \cdot 10^3\ \text{W/m}^2}{4 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}\ \text{W/(m}^2\text{K}^4)}\right)^{0,25} = \underline{\underline{280,3\ \text{K} \quad (7\ ^\circ\text{C})}}.$$

I pkt. e) kan vi se bort fra $\dot{Q} = 31$ TW fra jordas indre, idet denne er ubetydelig i forhold til solinnstrålingen $\dot{Q}_\text{inn} = j_\text{inn} \cdot A_\text{inn} = 180 \cdot 10^3$ TW.

Oppgave 3.

a) Idealgass: $p_1 = \mathtt{N}RT/V_1, \quad p_2 = \mathtt{N}RT/V_2$

i) $\underline{\Delta U = 0}$, fordi U kun avhengig T for ideell gass,

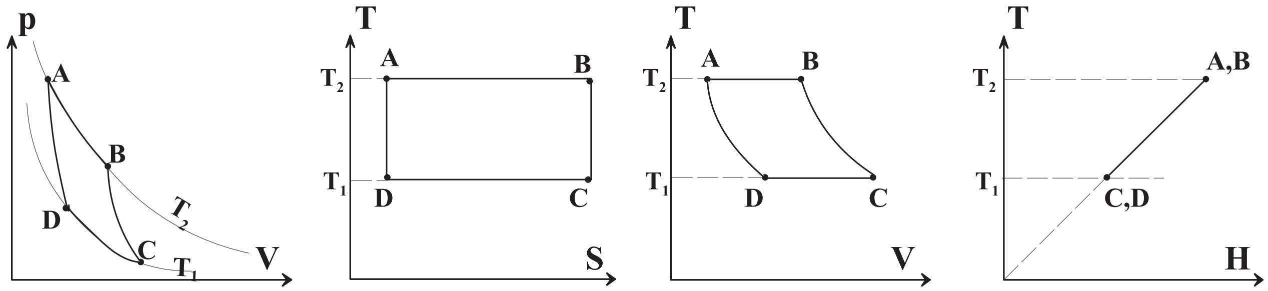
ii) $\underline{\Delta H} = \Delta U + \Delta(pV) = 0 + p_2V_2 - p_1V_1 = \mathtt{N}RT - \mathtt{N}RT = \underline{0}$,

iii) $\Delta S = \int_{V_1}^{V_2} đQ_\text{rev}/T$. 1.hovedsetning gir $đQ_\text{rev} = \text{d}U + p\text{d}V = 0 + p\text{d}V = \mathtt{N}RT/V \cdot \text{d}V$, slik at:
$\underline{\Delta S} = \frac{1}{T} \cdot \mathtt{N}RT \int_{V_1}^{V_2} \text{d}V/V = \underline{\mathtt{N}R \ln V_2/V_1}$ (ΔS fra oppgitt formel godtas selvsagt også),

iv) $\underline{\Delta F} = \Delta U - T\Delta S = \underline{-\mathtt{N}RT \ln V_2/V_1}$

b) Carnotprosess:
AB og CD isotermer, dvs. $\text{d}T = 0$. BC og DA adiabater, dvs. $\text{d}S = 0$.
For adiabatene i TV-diagrammet gjelder: $T \propto V^{1-\gamma} = V^{1-5/3} = V^{-2/3}$ som faller slakere enn V^{-1}.
($\gamma = 5/3$ for enatomig gass)

For TH-diagrammet: $H = U + pV = C_V \cdot T + \mathtt{N}RT = (C_V + \mathtt{N}R) \cdot T = C_p \cdot T \ \propto \ T$.



c) Den oppgitte formel for 3-dimensjonal Maxwellfordeling

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{b}{\pi}\right)^{3/2} \exp\left\{-bv^2\right\}, \quad \text{der } b = \frac{m}{2kT}$$

er basert på 1-dimensjonal fordeling:

$$g(v_x) = \left(\frac{b}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left\{-bv_x^2\right\},$$

På tilsvarende måte som i tre dimensjoner

$$f(v)\mathrm{d}v = F(\vec{\boldsymbol{v}})4\pi v \mathrm{d}v = g(v_x)g(v_y)g(v_z)4\pi v^2 \mathrm{d}v,$$

der $4\pi v^2 \mathrm{d}v$ er volum av et kuleskall med tykkelse dv) vil vi i to dimensjoner få

$$f_2(v)\mathrm{d}v = g(v_x)g(v_y)2\pi v \mathrm{d}v,$$

der $2\pi v \mathrm{d}v$ er areal av sirkelflate med bredde dv. Dvs.

$$\underline{\underline{f_2(v)}} = g(v_x)g(v_y)2\pi v = \frac{b}{\pi}\exp\left\{-b(v_x^2 + v_y^2)\right\} \cdot 2\pi v = \underline{\underline{2bv\exp\left\{-bv^2\right\}}} = \underline{\underline{\frac{m}{kT}v\exp\left\{-\frac{mv^2}{2kT}\right\}}}$$

$$\underline{\underline{\langle v^2 \rangle}} = 2b\int_0^\infty v^3 \exp\left\{-bv^2\right\} \mathrm{d}v = 2b\frac{1}{2b^2} = \frac{1}{b} = \underline{\underline{\frac{2kT}{m}}} \quad \text{(integral fra oppgitte tabellverdier)}$$

Alternativ beregning av $\langle v^2 \rangle$ uten å finne fordelingen:
Fra ekvipartisjonsprinisppet er $\langle E_x \rangle = \langle \frac{1}{2}mv_x^2 \rangle = \frac{1}{2}kT \Rightarrow \langle v_x^2 \rangle = \frac{kT}{m}$, slik at

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle = 2 \cdot \frac{kT}{m}.$$

A.Mi. 13.juni 2002

<u>Karakterstatistikk:</u>

A	B	C	D	E	F	Totalt	Ikke møtt	Middel (uten blanke)	Middel *) (uten blanke)
14	17	19	21	21	13	105	1	C	2,6

*) Middel tallekvivalent basert på : A=5, B=4, C=3, D=2, E=1, F=0

<u>Middelkarakter for de ulike oppgavene:</u>

1a	1b	1c	1d	1e	1f	2a	2b	2c	2d	2e	3a	3b	3c
A	D	B	D	D	E	A	D	F	D	E	B	D	E