SIF4016 **Termisk fysikk/Fysikk 4**
Løsningsforslag Eksamen 10. august 2002.

Tallsvar som brukes i videre regning er oppgitt med noen flere sifre enn et endelig svar bør oppgis i. Noen flere figurer/grafer enn brukt her i løsningsforslaget vil gjøre seg meget bra.

Oppgave 1.

a) Tilstandslikningen for lufta ved start- og sluttilstand bestemmelser V_2:

$$p_0V_0 = \mathtt{N}RT_0, \quad p_2V_2 = \mathtt{N}RT_0 \quad \Rightarrow \quad \underline{V_2} = V_0 \cdot \frac{p_0}{p_2} = 5{,}00\,\mathrm{m}^3\,\frac{1}{20} = \underline{\underline{0{,}25\,\mathrm{m}^3.}}$$

Vi kan også beregne antall mol av gassen (kan få bruk for seinere):

$$\mathtt{N} = \frac{p_0V_0}{RT_0} = \frac{101330\,\mathrm{N/m}^2 \cdot 5{,}0\,\mathrm{m}^3}{8{,}31 \cdot 293\,\mathrm{Nm/mol}} = \underline{208{,}1\,\mathrm{mol}.}$$

Vi unngår å innføre trykket p_2' og bruker derfor adiabatlikningen på form $T_0V_0^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$ for å bestemme T_2. Dette gir

$$\underline{\underline{T_2}} = T_0 \cdot \left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{\gamma-1} = 293\,\mathrm{K} \cdot \left(\frac{5{,}0}{0{,}25}\right)^{2/5} = \underline{\underline{971\,\mathrm{K}.}}$$

b) Det er kun under den adiabatiske prosessen det utveksles arbeid. Her er $pV^\gamma = p_0V_0^\gamma$, og dermed

$$\underline{W_{\mathrm{ABC}}} = W_{\mathrm{AB}} = \int_{V_0}^{V_2} p\mathrm{d}V = \int_{V_0}^{V_2} p_0V_0^\gamma \frac{\mathrm{d}V}{V^\gamma} = \frac{p_0V_0^\gamma}{1-\gamma}\left[V^{1-\gamma}\right]_{V_0}^{V_2} = \frac{p_0V_0}{1-\gamma}\left[\left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right]$$

$$= \frac{101330\,\mathrm{N/m}^2 \cdot 5{,}0\,\mathrm{m}^2}{-0{,}40}\left[\left(\frac{5{,}0}{0{,}25}\right)^{0{,}40} - 1\right] = \underline{\underline{-2{,}93\,\mathrm{MJ}.}} \quad \text{(arbeid utført } \textit{på} \text{ systemet)}$$

Når slutt-temperatur er lik start-temperaturen er den indre energi U for ideell gass uendret. Fra første hovedsetning beregner vi varme tilført systemet:

$$\underline{\underline{Q_{\mathrm{ABC}} = W_{\mathrm{ABC}} = -2{,}93\,\mathrm{MJ}}} \quad \text{(varme er trukket ut av systemet).}$$

Alternative løsninger under b):
Man kunne eventuelt beregnet $Q_{\mathrm{ABC}} = Q_{\mathrm{AB}} + Q_{\mathrm{BC}}$ fra hver delprosess. Ingen varme tilføres under den adiabatiske kompresjonen AC, og for den isokore prosessen BC er $Q_{\mathrm{BC}} = C_V\Delta T$:

$$\underline{Q_{\mathrm{ABC}}} = 0 + C_V\Delta T = \frac{5}{2}\cdot \mathtt{N}R(T_0 - T_2) = \frac{5}{2}\cdot 208\,\mathrm{mol}\cdot 8{,}31\cdot(293-971)\,\mathrm{J/mol} = \underline{\underline{-2{,}93\,\mathrm{MJ}.}}$$

Hvis man bestemmer Q_{ABC} først kan man som over bruke $\Delta U_{\mathrm{ABC}} = Q_{\mathrm{ABC}} - W_{\mathrm{ABC}} = 0$ og

$$W_{\mathrm{ABC}} = Q_{\mathrm{ABC}} = \underline{\underline{-2{,}93\,\mathrm{MJ}.}}$$

c) For den isoterme prosessen viser pV-diagrammet at arbeidet er mindre. Vi finner:

$$\underline{W_{\mathrm{AC}}} = \int_{V_0}^{V_2} p\mathrm{d}V = \int_{V_0}^{V_2} \mathtt{N}RT_0\frac{\mathrm{d}V}{V} = \mathtt{N}RT_0 \cdot \ln\,\frac{V_2}{V_0} = 208\cdot 8{,}31\cdot 293\,\mathrm{J}\cdot \ln\frac{0{,}25}{5{,}0} = \underline{\underline{-1{,}52\,\mathrm{MJ}}}$$

d) Arbeid påført maskinen $|W_{\mathrm{AB}}|$ er større enn arbeid W_{CA} som maskinen utfører, dvs. netto påført arbeid. Det er derfor en kjølemaskin. Varme Q_{inn} trekkes ut fra omgivelsene (reservoar) til systemet ved temperatur T_0 i CA, og noe større varme $|Q_{\mathrm{ut}}|$ fraktes ut av systemet til omgivelsene i prosess BC ved varierende temperatur $T_2 \to T_0$.

e) For kjølemaskinen er det nyttige Q_{inn} (varme ut av det "kalde" reservoaret). Det som koster er netto påført arbeid, $W_{\mathrm{AB}} + W_{\mathrm{CA}}$. Virkningsgraden (oftest kalt kjølefaktor for en kjølemaskin) er da lik

$$\eta = \frac{Q_{\mathrm{inn}}}{|W_{\mathrm{AB}} + W_{\mathrm{CA}}|}$$

Beregnet tidligere: $W_{\mathrm{AB}} = -\ 2{,}93$ MJ og $W_{\mathrm{CA}} = -W_{\mathrm{AC}} = 1{,}52$ MJ. For den isoterme prosessen AC er $\Delta U = 0$, slik at

$$Q_{\mathrm{inn}} = Q_{\mathrm{CA}} = W_{\mathrm{CA}} = 1,52 \text{ MJ}$$

Dermed er

$$\eta = \frac{Q_{\mathrm{inn}}}{|W_{\mathrm{AB}} + W_{\mathrm{CA}}|} = \frac{1,52}{1,41} = \underline{\underline{1,08}}.$$

Dersom den arbeider som en varmepumpe er den nyttige varmen $|Q_{\mathrm{ut}}|$ som tilføres varme reservoar(er), og virkningsgraden blir

$$\eta = \frac{|Q_{\mathrm{ut}}|}{|W_{\mathrm{AB}} + W_{\mathrm{CA}}|} = \frac{2,93}{1,41} = \underline{2,08}. \quad \text{(svaret aksepteres)}$$

Oppgave 2.

a) For en adiabatisk prosess er $đQ = 0$. Antar vi en reversibel prosess fra 1 til 2 er $đQ = T\mathrm{d}S$, og følgelig

$$0 \equiv \Delta S_{12} = C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + \mathtt{N}R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Som altså gir

$$\mathtt{N}R \ln \frac{V_2}{V_1} = -C_V \ln \frac{T_2}{T_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathtt{N}R}{C_V} \ln \frac{V_2}{V_1} = \ln \frac{T_1}{T_2}$$

For ideell gass er

$$C_p - C_V = \mathtt{N}R \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathtt{N}R}{C_V} = \frac{C_p - C_V}{C_V} = \gamma - 1$$

Dermed er

$$\ln \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{(\gamma-1)} = \ln \frac{T_1}{T_2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{T_1 V_1^{(\gamma-1)} = T_2 V_2^{(\gamma-1)} = \text{konstant}}}.$$

b) Hver gass A og B gjennomgår en volumøkning fra henholdsvis V_{A} og V_{B} til $V = V_{\mathrm{A}} + V_{\mathrm{B}}$, der p og T holdes konstant. Da er fra ideell gasslov

$$\frac{p}{kT} = \frac{N_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{A}}} = \frac{N_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{B}}} = \frac{N}{V} = \frac{N_{\mathrm{A}} + N_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}} + V_{\mathrm{B}}}$$

og entropiøkning for hver gass er gitt av formelen med konstant temperatur:

$$\Delta S_{\mathrm{A}} = \mathtt{N}_{\mathrm{A}} R \ln \frac{V}{V_{\mathrm{A}}} = -\mathtt{N}_{\mathrm{A}} R \ln x_{\mathrm{A}}$$

der molbrøken er $x_{\mathrm{A}} = \frac{N_{\mathrm{A}}}{N} = \frac{V_{\mathrm{A}}}{V}$.

Idet de to gassene A og B er ideelle og dermed uavhengig av hverandre er total entropiendring lik sum av entropiendring for hver enkelt av dem:

$$\underline{\underline{\Delta S_{\mathrm{mix}}}} = \Delta S_{\mathrm{A}} + \Delta S_{\mathrm{B}} = \underline{\underline{-R \sum_{i=\mathrm{A,B}} \mathtt{N}_i \ln x_i}}.$$

Oppgave 3.

a) Ved stasjonære forhold må all varme som produseres i det indre fraktes gjennom jordskorpa, derfor blir varmeflukstettheten $j = \dfrac{P}{4\pi r^2}$. Varmeledningslikningen

$$j = -\kappa \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$$

gir dermed

$$t(r) = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{j}{\kappa} = -\frac{P}{\kappa \cdot 4\pi r^2} = -\frac{A}{\underline{\underline{r^2}}},$$

med

$$A = \frac{P}{\kappa \cdot 4\pi} = \frac{34 \cdot 10^{12}\ \mathrm{W}}{3,4\ \mathrm{W/(K \cdot m)} \cdot 4\pi} = \underline{\underline{0,796 \cdot 10^{12}\ \mathrm{K \cdot m}}}.$$

b) Middelverdi av $t(r)$ er lik:

$$\langle t(r)\rangle = \int_{R_\mathrm{i}}^{R_0} t(r)\frac{\mathrm{d}r}{R_0 - R_\mathrm{i}} = -\frac{A}{R_0 - R_\mathrm{i}}\int_{R_\mathrm{i}}^{R_0}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -\frac{A}{R_0 - R_\mathrm{i}}\left(\frac{1}{R_\mathrm{i}} - \frac{1}{R_0}\right)$$

$$= -\frac{0,796\cdot 10^{12}\ \mathrm{K\cdot m}}{300\ \mathrm{km}}\left(\frac{1}{6100\ \mathrm{km}} - \frac{1}{6400\ \mathrm{km}}\right) = \underline{\underline{-20,39\ \mathrm{K/km}}} = \underline{\underline{-2,039\cdot 10^{-2}\ \mathrm{K/m}}}\,.$$

c) Midt i jordskorpa er

$$t(R_\mathrm{s}) = -\frac{0,796\cdot 10^{12}\ \mathrm{K\cdot m}}{(6250\ \mathrm{km})^2} = -20,38\ \mathrm{K/km}.$$

Og med antakelsen

$$\frac{T_0 - T_\mathrm{i}}{R_0 - R_\mathrm{i}} \approx \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \approx t(R_\mathrm{s})$$

får vi

$$T_\mathrm{i} = T_0 - t(R_\mathrm{s})(R_0 - R_\mathrm{i}) = 280\ \mathrm{K} + 20,38\ \mathrm{K/km}\cdot 300\ \mathrm{km} = 6394\ \mathrm{K} = \underline{\underline{6,39\cdot 10^3\ \mathrm{K}}}.$$

Oppgave 4.

a) Det oppgitte støttallet

$$\mathrm{d}^3 j(v,\theta,\phi) = \frac{n}{4\pi} v f(v)\mathrm{d}v \cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi,$$

er antall støt pr. sekund og m^2 for partikler med fart i intervallet $\langle v, v+\mathrm{d}v\rangle$ og retning innenfor romvinkelen $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi$. For å finne støttallet for partikler med fart i intervallet $\langle v, v+\mathrm{d}v\rangle$ uansett retning integrerer man over alle retninger mot veggen ($\theta \in [0, \pi/2\rangle$)

$$\mathrm{d}j(v) = \frac{n}{4\pi} v f(v)\mathrm{d}v \int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi = \frac{n}{4\pi} v f(v)\mathrm{d}v\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \underline{\underline{\frac{n}{4} v f(v)\mathrm{d}v.}}$$

Når man videre integrerer over alle hastigheter v får man direkte fra definisjonen av middelverdien av v for en Maxwellfordeling:

$$j = \frac{n}{4}\int_0^\infty v f(v)\mathrm{d}v = \underline{\underline{\frac{n}{4}\langle v\rangle.}}$$

b) Antall molekyler som treffer A i tida $\mathrm{d}t$ er

$$\mathrm{d}N = \frac{n}{4}\langle v\rangle\cdot\mathrm{d}t\cdot A = \frac{NA\langle v\rangle}{4V}\cdot\mathrm{d}t$$

og dette fører til en trykkreduksjon (fra gassloven $p = \frac{N}{V}kT$)

$$\mathrm{d}p = -\mathrm{d}N\frac{kT}{V} = -\frac{NA\langle v\rangle}{4V}\cdot\frac{kT}{V}\cdot\mathrm{d}t = -p\frac{A\langle v\rangle}{4V}\cdot\mathrm{d}t \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{A\langle v\rangle}{4V}\cdot\mathrm{d}t$$

Integrasjon fra $p_0(t=0)$ til $p'(t')$ gir

$$\ln\frac{p_0}{p'} = \frac{A\langle v\rangle}{4V}t' \quad\Rightarrow\quad t' = \frac{4V}{A\langle v\rangle}\ln\frac{p_0}{p'} = \underline{\underline{\frac{V}{A}\sqrt{\frac{2\pi m}{kT}}\ln\frac{p_0}{p'}.}}$$

der oppgitt uttrykk for $\langle v\rangle$ på formelark er brukt.

c) Tallverdier, med $m = \frac{0{,}018\ \mathrm{kg}}{N_\mathrm{A}}$ og $kN_\mathrm{A} = R$:

$$t' = \frac{1,0\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3}{1,0\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^{-2}}\sqrt{\frac{2\pi\cdot 0,018\ \mathrm{kg}}{8,31\ \mathrm{J/K}\cdot 300\ \mathrm{K}}}\cdot\ln\frac{2000}{0,010} = \underline{\underline{0,82\ \mathrm{s}.}}$$

Evt. mellomsvar:

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\cdot 0,018\ \mathrm{kg}}} = 594\ \mathrm{m/s}.$$

A.Mi. 13. aug. 2002

(15 oppmeldt til eksamen, 9 møtt)