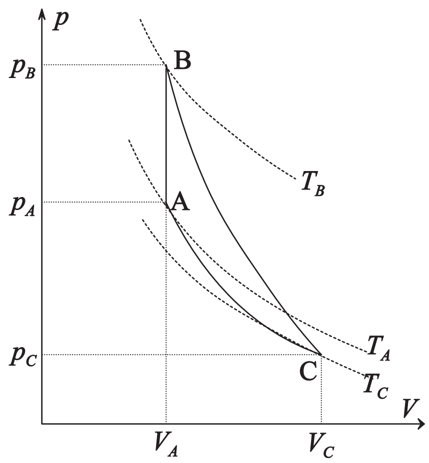
Institutt for fysikk 2002

SIF4016 **Termisk fysikk/Fysikk 4**
Løsningsforslag Eksamen 20. mai 2003.

Tallsvar er her oppgitt med 1-2 sifre flere enn et endelig svar bør oppgis i.
Noen flere figurer/grafer enn brukt her i løsningsforslaget vil gjøre seg meget bra.
Etter merket * gis alternative løsninger.

Oppgave 1. Termodynamikk.

a)



Enatomig gass har $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{5/2}{3/2} = \underline{\underline{\frac{5}{3}}}$

Isotermer: $p \propto V^{-1}$, dvs. helning -1

Adiabater: $p \propto V^{-\gamma} = V^{-5/3}$, dvs. helning -1,67

$pV^{5/2}$ =konstant-prosessen: $p \propto V^{-5/2}$, dvs. helning -2,5

Isotermer har altså lavest helning og er tegnet inn slik.

b)

$$\underline{\underline{\mathtt{N}}} = \frac{p_A V_A}{RT_A} = \frac{101,3 \text{ kPa} \cdot 4,0 \text{ dm}^3}{8,314 \cdot 300 \text{ J/mol}} = \underline{\underline{0,1625 \text{ mol}}}$$

c)

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{đQ}{T} = \int_A^B \frac{C_V \mathrm{d}T}{T} = \frac{3}{2} R \cdot \mathtt{N} \cdot \ln \frac{T_B}{T_A} = \frac{3}{2} \cdot 8,314 \cdot 0,1625 \ \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot \ln \frac{3}{2} = \underline{\underline{0,822 \ \frac{\text{J}}{\text{K}}}}.$$

For den sykliske, reversible, prosessen er $\Delta S_{\text{tot}} = 0$, for den adiabatiske prosessen CA er $\Delta S_{CA} = 0$, derfor er

$$\Delta S_{BC} = -\Delta S_{AB} = \underline{\underline{-0,822 \ \frac{\text{J}}{\text{K}}}}.$$

* Man kan mer tungvindt også beregne $\Delta S_{BC} = \int_B^C \frac{đQ}{T}$ med $đQ = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V = \frac{5}{6}\mathtt{N}R\mathrm{d}T$, som beregnet i pkt. g).

d) For adiabaten AC har vi $p_C V_C^{\gamma} = p_A V_A^{\gamma}$ og for prosessen BC har vi $p_C V_C^{5/2} = p_B V_B^{5/2}$. Sammen gir dette

$$\frac{V_C^{\gamma}}{V_C^{5/2}} = \frac{p_A}{p_B} \cdot (V_A)^{\gamma - 5/2}$$

som gir

$$V_C = V_A \cdot \left(\frac{p_A}{p_B}\right)^{\frac{1}{\gamma - 5/2}} = V_A \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{6}{5}} = V_A \cdot 1,6267 = \underline{\underline{6,507 \text{ dm}^3}}.$$

Da er

$$p_C = p_A \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{\gamma} = p_A \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{6}{5} \cdot \gamma} = p_A \left(\frac{2}{3}\right)^2 = p_A \cdot 0,4444 = \underline{\underline{0,4444 \text{ atm}}}.$$

og

$$T_C = \frac{p_C V_C}{\mathtt{N}R} = \frac{0,4444 \cdot 101,3 \cdot 10^3 \text{ Pa} \cdot 6,507 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{0,1625 \cdot 8,314 \text{ Nm/K}} = \underline{\underline{217 \text{ K}}}.$$

* eller

$$T_C = \frac{p_C V_C}{\mathtt{N}R} = \frac{p_A \left(\frac{2}{3}\right)^2 V_A \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{6}{5}}}{\mathtt{N}R} = T_A \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{5}} = T_A \cdot 0,723 = \underline{\underline{217 \text{ K}}}.$$

e) I BC der $pV^{5/2} = p_C V_C^{5/2} = p_B V_B^{5/2}$ får vi

$$\begin{aligned} W_{BC} &= \int_B^C p\mathrm{d}V = \int_B^C p_B \left(\frac{V_B}{V}\right)^{5/2} \mathrm{d}V = p_B V_B^{5/2}\left[-\frac{2}{3}V^{-3/2}\right]_B^C = p_B V_B^{5/2}\cdot\frac{2}{3}\left(V_B^{-3/2} - V_C^{-3/2}\right) \\ &= \frac{2}{3}p_B V_B - \frac{2}{3}p_C V_C = \frac{2}{3}\mathtt{N}R\,(T_B - T_C) = \frac{2}{3}0,1625\cdot 8,314\ \mathrm{J/K}\cdot(450-217)\ \mathrm{K} = \underline{\underline{209,9\ \mathrm{J}}}. \end{aligned}$$

* Kontroll: Med $đQ = \frac{5}{6}\mathtt{N}R\mathrm{d}T$ fra pkt. g) blir med 1.hovedsetning:
$W_{BC} = Q_{BC} - \Delta U_{BC} = \frac{5}{6}\mathtt{N}R\mathrm{d}T - \frac{3}{2}\mathtt{N}R\mathrm{d}T = -\frac{2}{3}\mathtt{N}R(T_C - T_B)$ som over.

f)

$$\eta = \frac{W}{Q_{\mathrm{inn}}} = \frac{W_{BC} + W_{CA}}{Q_{AB}}$$

I BC går varme ut. W_{BC} er funnet over. For adiabaten CA og isokoren AB finner vi

$$W_{CA} = -C_V(T_A - T_C) = -\frac{3}{2}\cdot\mathtt{N}\cdot R(T_A - T_C) = -\frac{3}{2}\cdot 0,1625\cdot 8,314\ \mathrm{J/K}\cdot(300-217)\ \mathrm{K} = -168,2\ \mathrm{J}.$$

$$Q_{AB} = C_V\cdot(T_B - T_A) = \frac{3}{2}\cdot\mathtt{N}\cdot R(T_B - T_A) = \frac{3}{2}\cdot 0,1625\cdot 8,314\ \mathrm{J/K}\cdot(450-300)\ \mathrm{K} = 304,0\ \mathrm{J}.$$

$$\underline{\underline{\eta = \frac{209,9 - 168,2}{304,0} = \frac{41,70}{304,0} = 0,137.}}$$

* Med de foreslåtte 'reserveverdiene' fås: $\eta = \frac{216-182,4}{304,0} = \underline{0,111}$.

g) Varmekapasiteten for en prosess X er definert ved $C_X = (đQ/\mathrm{d}T)_X$, der ifølge 1.hovedsetning $đQ = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V$. Her er $\mathrm{d}U = C_V\mathrm{d}T = \frac{3}{2}\mathtt{N}R\mathrm{d}T$ og vi vil også uttrykke $p\mathrm{d}V$ med $\mathrm{d}T$:

$$pV = \mathtt{N}RT \quad\Rightarrow\quad p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = \mathtt{N}R\mathrm{d}T \quad ; \qquad pV^{5/2} = \text{konst.} \quad\Rightarrow\quad V\mathrm{d}p = -\frac{5}{2}p\mathrm{d}V.$$

som sammen gir $p\mathrm{d}V = -\frac{2}{3}\mathtt{N}R\mathrm{d}T$. Da blir $đQ = C_V\mathrm{d}T + p\mathrm{d}V = \frac{3}{2}\mathtt{N}R\mathrm{d}T - \frac{2}{3}\mathtt{N}R\mathrm{d}T = \frac{5}{6}\mathtt{N}R\mathrm{d}T$

Slik at under prosessen BC er varmekapasiteten

$$C_{BC} = \left(\frac{đQ}{\mathrm{d}T}\right)_{BC} = \frac{5}{6}\mathtt{N}R, \qquad \underline{\underline{\text{dvs. } x = \frac{5}{6}.}}$$

* Eller utregnet mer konkret ved 1.h.setn, $\Delta U = C_V\Delta T$ og W_{BC} fra e):
$Q_{BC} = \Delta U_{BC} + W_{BC} = \frac{3}{2}\mathtt{N}R(T_C - T_B) + \frac{2}{3}\mathtt{N}R(T_B - T_C) = \frac{5}{6}\mathtt{N}R(T_C - T_B)$, med svar som over.

* Eller med konkrete tallverdier, idet $Q_{BC} = \Delta U_{BC} + W_{BC} = -472,2 + 209,9\ \mathrm{J} = -262,3\ \mathrm{J}$:
$C_{BC} = \frac{Q_{BC}}{T_C - T_B} = \frac{-262,3\ \mathrm{J}}{(217-450)\ \mathrm{K}} = 1,126\ \mathrm{J/K} = 0,833\cdot\mathtt{N}R.$

Oppgave 2. Varmeledning.

a) Det indre av tømmerveggene skal varmes opp til +20 °C mens det ytterste laget beholder utetemperatur. Vi kan i beregningene bruke at veggen varmes til middeltemperaturen +5 °C (278 K), dvs. $\Delta T = +15$ K. Volum av tømmerveggene beregnes enklest fra:

$V_{\mathrm{tøm}} = V_{\mathrm{ytre}} - V_{\mathrm{indre}} = 8,4\ \mathrm{m}\cdot 5,4\ \mathrm{m}\cdot 2,9\ \mathrm{m} - 8,0\ \mathrm{m}\cdot 5,0\ \mathrm{m}\cdot 2,5\ \mathrm{m} = 131,54\ \mathrm{m}^3 - 100\ \mathrm{m}^3 = 31,54\ \mathrm{m}^3$,

(* alternativt: $A\cdot d_{\mathrm{tøm}} \approx 158\ \mathrm{m}^2\cdot 0,20\ \mathrm{m} = 31,60\ \mathrm{m}^3$) slik at det kreves varme

$$Q = c_g V_{\mathrm{tøm}}\cdot\Delta T = 1,35\ \frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{m}^3\mathrm{K}}\cdot 31,54\ \mathrm{m}^3\cdot 15\ \mathrm{K} = \underline{638,7\ \mathrm{MJ}}.$$

Tid for å heve innetemperaturen (dvs. varme opp tømmer) blir da

$$\Delta t = \frac{638,7\ \mathrm{MJ}}{7,0\ \mathrm{kJ/s}} = 91,24\cdot 10^3\ \mathrm{s} = 25,34\ \text{timer} = \underline{25\ \text{timer}\ 20\ \text{min.}}$$

b) Når innerpanelet skal varmes opp til innetemperatur er $\Delta T_{\mathrm{indre}} = 30$ K mens ytterpanelet holder utetemperatur og ikke skal varmes opp. Volumet av den 2,5 cm tykke indre panel er

$V_{\mathrm{indre}} = 8,05\cdot 5,05\cdot 2,55\ \mathrm{m}^3 - 100\ \mathrm{m}^3 = 3,664\ \mathrm{m}^3.$ $\left(A\cdot d_{\mathrm{indre}} \approx 158\ \mathrm{m}^2\cdot 0,025\ \mathrm{m} = 3,95\ \mathrm{m}^3 \text{godtas også}\right)$

Steinulla skal varmes til middeltemperaturen +5 °C (278 K) slik at $\Delta T_\mathrm{s} = 15$ K. Volumet av steinulla er $V_\mathrm{s} = 8,35 \cdot 5,35 \cdot 2,85\ \mathrm{m}^3 - 8,05 \cdot 5,05 \cdot 2,55\ \mathrm{m}^3 = 23,653\ \mathrm{m}^3$. ($158\ \mathrm{m}^2 \cdot 0,15\ \mathrm{m} = 23,70\ \mathrm{m}^3$ er OK.)
Dette krever varme:

$$\begin{aligned} Q &= c_\mathrm{g} V_\mathrm{indre} \cdot \Delta T_\mathrm{indre} + c_\mathrm{s} V_\mathrm{s} \cdot \Delta T_\mathrm{s} \\ &= 1350\ \mathrm{kJ\,m^{-3}K^{-1}} \cdot 3,664\ \mathrm{m}^3 \cdot 30\ \mathrm{K} + 26,5\ \mathrm{kJ\,m^{-3}K^{-1}} \cdot 23,653\ \mathrm{m}^3 \cdot 15\ \mathrm{K} \\ &= 148,4\ \mathrm{MJ} + 9,4\ \mathrm{MJ} = \underline{157,8\ \mathrm{MJ}}, \end{aligned}$$

som krever oppvarmingstid

$$\Delta t = \frac{157,8\ \mathrm{MJ}}{7,0\ \mathrm{kJ/s}} = 22,54 \cdot 10^3\ \mathrm{s} = 6,26\ \text{timer} = \underline{\underline{6\ \text{timer}\ 15\ \text{min.}}}$$

c) For hytta med massive tømmervegger vil vi få

$$K_\text{tøm} = \frac{\kappa_\mathrm{g}}{d_\text{tøm}} = \frac{0,14\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}}{0,20\ \mathrm{m}} = \underline{\underline{0,700\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}}}}$$

slik at varmestrøm som ovnen må kompensere for er da lik

$$|\dot{Q}| = K_\text{tøm} \cdot A \cdot \Delta T = 0,700\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}} \cdot 158\ \mathrm{m}^2 \cdot 30\ \mathrm{K} = \underline{\underline{3,32\ \mathrm{kW}}}.$$

d) For isolasjonshytta med vegger med de tre lagene gran/steinull/gran med tykkelser henholdsvis $d_\mathrm{indre}, d_\mathrm{s}$ og d_ytre og varmeoverføringskoeffisienter henholdsvis $K_\mathrm{indre}, K_\mathrm{s}$ og K_ytre, der

$$K_\mathrm{ytre} = K_\mathrm{indre} = \frac{\kappa_\mathrm{g}}{d_\mathrm{indre}} = \frac{0,14\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}}{0,025\ \mathrm{m}} = 5,600\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}}$$

og

$$K_\mathrm{s} = \frac{\kappa_\mathrm{s}}{d_\mathrm{s}} = \frac{0,047\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}}{0,15\ \mathrm{m}} = 0,3133\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}}.$$

K_tot bestemmes fra at varmestrømtettheten j gitt ved Fouriers lov er lik gjennom alle lag av veggen:

$$-j = K_\mathrm{indre} \cdot (T_\mathrm{inne} - T_1) = K_\mathrm{s} \cdot (T_1 - T_2) = K_\mathrm{ytre} \cdot (T_2 - T_\mathrm{ute})$$

der T_i er temperaturer på tilhørende veggflater. Dette gir

$$\begin{aligned} T_\mathrm{inne} - T_1 &= -j \frac{1}{K_\mathrm{indre}} \\ T_1 - T_2 &= -j \frac{1}{K_\mathrm{s}} \\ T_2 - T_\mathrm{ute} &= -j \frac{1}{K_\mathrm{ytre}} \end{aligned} \tag{1}$$

og sum av likningene gir

$$T_\mathrm{inne} - T_\mathrm{ute} = -j \left(\frac{1}{K_\mathrm{indre}} + \frac{1}{K_\mathrm{s}} + \frac{1}{K_\mathrm{ytre}} \right)$$

og da $K_\mathrm{ytre} = K_\mathrm{indre}$ får vi ifølge definisjonen av K

$$K_\mathrm{tot} = \left(2 \cdot \frac{1}{K_\mathrm{indre}} + \frac{1}{K_\mathrm{s}} \right)^{-1} = \left(\frac{2}{5,600} + \frac{1}{0,3233} \right)^{-1} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}} = \underline{\underline{0,282\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}}}},$$

Varmestrøm som ovnen må kompensere for er da lik

$$|\dot{Q}| = K_\mathrm{tot} \cdot A \cdot \Delta T = 0,282\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}} \cdot 158\ \mathrm{m}^2 \cdot 30\ \mathrm{K} = \underline{\underline{1,34\ \mathrm{kW}}}.$$

* og da kan temp.fall over hvert panel beregnes til $\Delta T_\mathrm{g} = \frac{|\dot{Q}|}{K_\mathrm{indre} \cdot A} = \frac{1,34 \cdot 10^3}{5,6 \cdot 158}\ \mathrm{K} = 1,5\ \mathrm{K}$.

<u>Oppgave 3. Diverse.</u>

a) Velger syklisk relasjon der $\mu_\mathrm{J} = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U$ inngår:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial U}\right)_T = -1$$

$$\mu_\mathrm{J} = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U = -\frac{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T}{\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V} = \underline{\underline{-\frac{T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p}{C_V}}},$$

der $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$ er funnet fra formelliste og $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ er kjent resultat fra definisjonen av C_V.

b) Hvis $\mu_\mathrm{J} \equiv 0$ er

$$T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}T}{T} \quad \Rightarrow \quad \ln p = \ln T + \ln A(V) \quad \Rightarrow \quad p = T \cdot A(V).$$

For gitt volum er A konstant og trykket må være proporsjonalt med temperaturen.

Hvis $\mu_\mathrm{JT} \equiv 0$ er

$$T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{\mathrm{d}T}{T} \quad \Rightarrow \quad \ln V = \ln T + \ln B(p) \quad \Rightarrow \quad V = T \cdot B(p),$$

For gitt trykk er B konstant og volumet må være proporsjonalt med temperaturen.

Hvis begge koeffisientene er lik null må begge betingelsene over være oppfylt og følgelig må $\underline{\underline{p \cdot V \text{ være proporsjonal med temperaturen.}}}$ Det er kun ideell gass som oppfyller dette kravet.

* Begrunnelsen kan gjøres matematisk mer elegant. De to betingelsene gir: $T = \frac{p}{A(V)} = \frac{V}{B(p)}$, dvs. $B(p) \cdot p = A(V) \cdot V$. Siden venstre side kun avhengig av p og høyre side kun avhengig av V må dette være lik en konstant, kalt D, slik at $A(V) = D/V$ innsatt i $T = \frac{p}{A(V)}$ gir tilstandslikningen $\underline{\underline{p \cdot V = D \cdot T}}$.

* Alternativt kan man finne fra syklisk relasjon at $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V / \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -p/V$, slik at vi får en diff.likning

$$\mathrm{d}p = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V = \frac{p}{T}\mathrm{d}T - \frac{p}{V}\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}T}{T} - \frac{\mathrm{d}V}{V} \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{p}{p_0} = \ln\frac{T}{T_0} + \ln\frac{V_0}{V}$$

dvs. $p = \text{konst} \cdot T/V$, som igjen er ideell gasslov.

OBS: Henvisning til at ideell gass oppfyller begge kravene er ikke fullgod løsning, da det spørres etter krav til tilstandslikningen og altså at *kun* ideell gass oppfyller kravene.

c) Molvekter: KCl: (39,1 + 35,5) g/mol = 74,6 g/mol. NaCl: (23,0 + 35,5) g/mol = 58,5 g/mol.
Antall mol fra KCl: $\mathtt{N}_{\mathrm{K}+} = \mathtt{N}_{\mathrm{Cl}-}$ = 100 g / 74,6 g/mol = 1,341 mol, som gir mol partikler fra KCl: $\mathtt{N}_{\mathrm{KCl}} = \mathtt{N}_{\mathrm{K}+} + \mathtt{N}_{\mathrm{Cl}-} = \underline{2{,}682 \text{ mol}}$.
Antall mol fra NaCl: $\mathtt{N}_{\mathrm{Na}+} = \mathtt{N}_{\mathrm{Cl}-}$ = 100 g / 58,5 g/mol = 1,709 mol, som gir mol partikler fra NaCl: $\mathtt{N}_{\mathrm{NaCl}} = \mathtt{N}_{\mathrm{Na}+} + \mathtt{N}_{\mathrm{Cl}-} = \underline{3{,}418 \text{ mol}}$.

Da blir ifølge van't Hoffs lov for osmotisk trykk (oppgitt):

$$\Delta p = \Delta p_{\mathrm{NaCl}} - \Delta p_{\mathrm{KCl}} = \frac{RT}{V} \cdot (\mathtt{N}_{\mathrm{NaCl}} - \mathtt{N}_{\mathrm{KCl}})$$

Vannmengden blir følgelig:

$$V = \frac{RT}{\Delta p} \cdot (\mathtt{N}_{\mathrm{NaCl}} - \mathtt{N}_{\mathrm{KCl}}) = \frac{8,314 \cdot 293 \text{ Nm/mol}}{3,00 \cdot 101,3 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2} \cdot 0,736 \text{ mol} = \underline{\underline{5,90 \text{ dm}^3}}.$$

Karakterstatistikk:

A	B	C	D	E	F	Totalt	Middel (uten blanke)	Middel *) (uten blanke)
17	17	17	13	17	11	92	C	2,7

*) Middel tallekvivalent basert på : A=5, B=4, C=3, D=2, E=1, F=0

Middelkarakter for de ulike oppgavene:

1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c
B	A	B	B	C	D	F	D	E	B	E	A	E	D

A.Mi. 7.juni 2003