Eksamen i fag TFY4165/FY1005
Termisk fysikk, 2/6 – 2007.

Forslag til Løsning.

Oppgave 1

a) For å bestemme T_1 trenger en sammenhengen mellom trykk og temperatur langs en adiabat. For ideell gass har en da $pV^\gamma = \text{konst}$. Volumet V elimineres via $pV = RT$, og en finner

$$pV^\gamma = p\left(\frac{RT}{p}\right)^\gamma = p^{1-\gamma}T^\gamma R^\gamma = \text{konst}$$

$$Tp^{-\sigma} = \text{konst}$$

der $\sigma = \frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{C_p - C_V}{C_p} = \frac{R}{C_p}$ (1 mol)

En finner så

$$T_1 p_1^{-\sigma} = T_0 p_0^{-\sigma}$$

$$\underline{\underline{T_1 = T_0\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^\sigma}} \qquad \left(\sigma = \frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{2}{7}\right)$$

og tilsvarende

$$T_2 p_0^{-\sigma} = T_0 p_1^{-\sigma}$$

$$\underline{\underline{T_2 = T_0\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^\sigma}} \qquad (\text{dvs. } T_1 T_2 = T_0^2)$$

b) Ved avkjølingen mellom temperaturene T_1 og T_0 er trykket konstant. Opptatt varme blir derfor

$$\underline{\underline{Q_1 = C_p(T_0 - T_1)}} \qquad \left(C_p = \frac{R}{\sigma} = \frac{\gamma}{\gamma-1}R\right)$$

Tilsvarende endring i indre energi

$$\underline{\underline{\Delta U = C_V(T_0 - T_1)}}$$

der $C_V = C_p/\gamma = R/(\gamma-1)$.

Energibevarelse etter 1. hovedsetning betyr at $Q = \Delta U + W_1$. Siden temperaturen er den samme ved start og slutt er $\Delta U = 0$ for ideell gass. Følgelig

$$\underline{\underline{W_1 = Q = C_p(T_0 - T_1)}}$$

c) Det utvendige trykket vil gjøre arbeidet

$$W_0 = p_0(V_0 - V_1) = p_0\left(\frac{RT_0}{p_0} - \frac{RT_0}{p_1}\right) = \underline{\underline{RT_0\left(1 - \frac{p_0}{p_1}\right)}}.$$

Nettoarbeid ved kompresjonen

$$W_{in} = W_1 + W_0 = C_p(T_0 - T_1) + RT_0\left(1 - \frac{p_0}{p_1}\right) =$$

$$R\left[\frac{\gamma}{\gamma-1}(T_0 - T_1) + T_0\left(1 - \frac{p_0}{p_1}\right)\right] = 8{,}314\cdot\left[\frac{7}{2}(293 - 435) + 293\left(1 - \frac{1}{4}\right)\right]\ \text{J/mol} = \underline{\underline{-2{,}31\ \text{kJ/mol}}}.$$

Endring av entropi: $\Delta S = R[\ln p_0 - (\ln p_1)] = R\ln(p_1/p_0)$

Endring av volum: $\Delta V = V_0 - V_1 = W_0/p_0$

Endring av indre energi: $\Delta U = 0$.

Maksimalt arbeid blir dermed

$$W_{max} = T_0\Delta S - \Delta U - p_0\Delta V = RT_0\left[\ln(p_1/p_0) - 1 + \frac{p_0}{p_1}\right]$$

$$= 8{,}314\cdot 293\left[\ln(4/1) - 1 + \frac{1}{4}\right]\ \text{J/mol} = \underline{\underline{1{,}55\ \text{kJ/mol}}}.$$

[Dette er lik arbeidet langs isotermen minus W_0.]

Oppgave 2.

a) Etter Boltzmanns prinsipp er entropien

$$S = k \ln W$$

der W er antall mikrotilstander. Ved blanding øker W da nye konfigurasjoner dannes ved at ulike partikler bytter plass. Med N_i partikler av komponent i kan partiklene byttes om på

$$W = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{c} N_i!} \qquad \left(N = \sum_{i=1}^{c} N_i\right)$$

ulike måter. Disse nye konfigurasjonene gir blandingsentropien

$$\Delta S_{mix} = k \ln W = k\left[\ln N! - \sum_{i=1}^{c} \ln(N_i!)\right]$$

Bruk av oppgitt formel gir så

$$\ln N! = N \ln N - N + \ln\sqrt{2\pi N} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} N\ln N - N$$

(da $\frac{1}{N}\ln\sqrt{2\pi N} \to 0$ når $N \to \infty$)

Med $N = \sum_{i=1}^{c} N_i$ gir så dette

$$\Delta S_{mix} = k\left(N\ln N - \sum_{i=1}^{c} N_i \ln N_i\right) = -k \ln\left(\frac{N_i}{N}\right)$$

$$= -k \sum_{i=1}^{c} N_A n_i \ln\left(\frac{N_A n_i}{N_A n}\right) = \underline{\underline{-R\sum_{i=1}^{c} n_i \ln\left(\frac{n_i}{n}\right)}}$$

der N_A er Avogadros tall ($R = N_A k$, $n_i = \frac{N_i}{N_A}$).

b) Molvekten til O_2 er 32g mens den for N_2 er 28g. Antall mol O_2 og N_2 blir da henholdsvis

$$n_O = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} = 0,125$$

$$n_N = \frac{21}{28} = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$n = n_O + n_N = \frac{7}{8} = 0,875$$

Blandingsentropien blir følgelig

$$\Delta S_{mix} = -R\left(n_O \ln\frac{n_O}{n} + n_N \ln\frac{n_N}{n}\right)$$

$$= -Rn\left(\frac{1}{7}\ln\frac{1}{7} + \frac{6}{7}\ln\frac{6}{7}\right) = 0{,}410 \cdot nR = \underline{\underline{2{,}98\ \mathrm{J/K}}}$$

Når gassene skilles endres ikke indre energi og volum når temperaturen og trykket er konstant (ideelle gasser). Minste arbeid er derfor lik avgitt varme. Minste tilførte arbeid skjer ved reversibel prosess. Da gjelder $dQ = TdS$. Minste tilførte arbeid for å skille gassene blir følgelig

$$W = T\Delta S_{mix} = 293 \cdot 2{,}98\ \mathrm{J} = \underline{\underline{873\ \mathrm{J}}}$$

[Her kan en også benytte eksergien før blanding, $\Delta S = \Delta S_{mix}$, $\Delta U = 0$, $\Delta V = 0$, $T_0 = T$

$$W = W_{max} = T_0\Delta S - \Delta U - p_0\Delta V = T\Delta S_{mix}.]$$

Oppgave 3.

a) Ved derivering finner en

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -i\omega e^{i(kx-\omega t)} = -i\omega T$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = (ik)^2 e^{i(kx-\omega t)} = -k^2 T$$

Innsatt ser en at dette løser likningen $\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ dersom

$$i\omega = Dk^2$$

eller

$$k = k_\pm = i^{1/2}\sqrt{\frac{\omega}{D}} = \underline{\underline{\pm(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}}} \qquad \left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = i\right)$$

(evt. $i^{1/2} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{1/2} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$)

(Har også $\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{1/2} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i2\pi}\right)^{1/2} = e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\pi} = -e^{i\frac{\pi}{4}}$.)

b) Med den funne sammenhengen mellom k og ω blir nå løsningen ($i(1+i) = i-1$)

$$T = e^{-\alpha\sqrt{\omega}x} e^{i(\alpha\sqrt{\omega}x - \omega t)}$$

der

$$\underline{\underline{\alpha = \frac{1}{\sqrt{2D}}}}$$

[Her $k = k_+$ ($ik = i-1$) valgt for å få løsning som avtar for økende x. Ved å ta realdelen av denne $e^{i(\alpha\sqrt{\omega}x-\omega t)} = \cos(\alpha\sqrt{\omega}x-\omega t) + i\sin(\alpha\sqrt{\omega}x - \omega t)$, eller addere den kompleks konjugerte finnes den gitte løsningen

$$T(x,t) = T_0 - T_1 e^{-\alpha\sqrt{\omega}x}\cos(\alpha\sqrt{\omega}x - \omega t).]$$

Vinkelfrekvensen: $\omega = \frac{2\pi}{\tau_0} = \frac{2\pi}{365\,\text{dag}} = \underline{\underline{1{,}72\cdot 10^{-2}\,\text{dag}^{-1}}}$

Laveste temperatur T_m opptrer når

$$\cos(\alpha\sqrt{\omega}x - \omega t) = 1$$

Med $T_m = 0$ har en følgelig

$$0 = T_0 - T_1 e^{-\alpha\sqrt{\omega}x}$$

$$e^{-\alpha\sqrt{\omega}x} = T_0/T_1$$

$$x = x_0 = \frac{-1}{\alpha\sqrt{\omega}}\ln(T_0/T_1) = \frac{-1\,\text{m}}{4{,}8\sqrt{1{,}72\cdot 10^{-2}}}\ln\left(\frac{4}{8}\right)$$

$$= \underline{\underline{1{,}10\,\text{m}}}$$

På overflaten $x=0$ er $T = T_m$ når $t = 0$ (eller $\omega t = 2\pi n$, n = heltall). I dybden $x = x_0$ har en tilsvarende

$$\alpha\sqrt{\omega}x_0 - \omega\tau = 0$$

$$\tau = \frac{\alpha}{\sqrt{\omega}}x_0 = \frac{-1}{\omega}\ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right) = \frac{-1\,\text{dag}}{1{,}72\cdot 10^{-2}}\ln\left(\frac{4}{8}\right) = \underline{\underline{40\,\text{dager}}}.$$

c) For varmeledningsproblemer som er „likeformede" vil endring av avstander med faktor a endre tiden med en faktor a^2. Dvs. ny avstand $r_1 = ar$ og ny tid $t_1 = a^2 t$ gir samme likning. Her er $a = R_2/R_1$ som da gir

$$t_2 = t_1(R_2/R_1)^2 = 90\,\text{min}\cdot\left(\frac{7{,}5}{5{,}0}\right)^2 = \underline{202{,}5\,\text{min}} \approx \underline{3\tfrac{1}{3}\,\text{timer}}.$$

Tilsvarende gir endring av D med faktor b en endring av tiden med en faktor b^{-1}. Dvs $D_s = bD$ gir $t_s = b^{-1}t$.
Avkjølingstida for stålkula blir derfor

$$t_3 = b^{-1}t_2 = \left(\frac{D_1}{D_s}\right)t_2 = \frac{0{,}00050}{0{,}057}\,202{,}2\,\text{min} = 1{,}78\,\text{min} \approx \underline{\underline{1{,}8\,\text{min}}}$$