Kontinuasjonseksamen i fag (1)
TFY4165 Termisk fysikk, den 10/8-07.

Forslag til Løsning.

Oppgave 1.

a) Utført arbeid er gitt ved:

$$W_{ab} = \int_{V_a}^{V_b} p\,dV = \int_{V_a}^{V_b} \left(\frac{RT_2}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right) dV =$$

$$\Big|_{V_a}^{V_b} \left[RT_2 \ln(V-b) + \frac{a}{V}\right] = \underline{\underline{RT_2 \ln\left(\frac{V_b-b}{V_a-b}\right) + a\left(\frac{1}{V_b} - \frac{1}{V_a}\right)}}$$

Den tilførte varme er lik endring i indre energi pluss utført arbeid (1. hovedsetning)

$$Q_{ab} = \Delta U_{ab} + W_{ab} = U_a - U_b + W_{ab} = \underline{\underline{RT_2 \ln \frac{V_b-b}{V_a-b}}}$$

(der $U_x = C_V T_2 - \frac{a}{V_x}$ $(x = a, b)$)

b) Langs isotermen ab tilføres varmen ved konstant temperatur. Fra $dQ = TdS$ følger dermed ($T = T_2 = \text{konst}$)

$$\Delta S_{ab} = \underline{\underline{\frac{1}{T_2} Q_{ab}}} = \underline{\underline{R \ln \frac{V_b-b}{V_a-b}}}$$

Langs isokoren „da" er $dV = 0$. Fra den termodynamiske identitet følger dermed

(2)

$$TdS = dU + p\,dV = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] dV$$

$$= C_V dT \qquad (dV = 0)$$

slik at en finner

$$\Delta S_{da} = \int dS = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_V}{T} dT = C_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \underline{\underline{\frac{5}{2} R \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}}$$

c) Langs isokorene er utført arbeid lik 0 da $dV = 0$. Langs isotermen cd kan resultatet fra punkt a) benyttes ved å erstatte T_2 med T_1 og å bytte om V_a og V_b. Arbeidet langs cd blir dermed

$$W_{cd} = RT_1 \ln \frac{V_a-b}{V_b-b} + a\left(\frac{1}{V_b} - \frac{1}{V_a}\right)$$

slik at netto arbeid pr. syklus blir

$$W = W_{ab} + W_{cd} = \underline{R(T_2 - T_1) \ln \frac{V_b-b}{V_a-b}}$$

Virkningsgraden blir følgelig:

$$\eta = \frac{W}{Q_{ab}} = \frac{R(T_2-T_1) \ln\left(\frac{V_b-b}{V_a-b}\right)}{RT_2 \ln\left(\frac{V_b-b}{V_a-b}\right)} = \underline{\underline{1 - \frac{T_1}{T_2}}}$$

(dvs. samme virkningsgrad som Carnot-syklusen).
[Alternativt er $Q_{cd} = -Q_{ab} T_1/T_2$ når Q_{ab} fra punkt a) benyttes, og dermed blir $W = Q_{ab} + Q_{cd} = \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) Q_{ab}$ $(\Delta U = 0)$.]

Oppgave 2.

a) I termisk likevekt er trykk, temperatur og kjemiske potensial konstante over systemet.

Ved likevekt mellom væskefase og dampfase må kjemisk potensial eller Gibbs fri energi være den samme i begge fasene. Når temperaturen endres må en da ha

$$dG_v = dG_g$$

$$-S_v\,dT + V_v\,dp = -S_g\,dT + V_g\,dp$$

$$(S_g - S_v)\,dT = (V_g - V_v)\,dp$$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{S_g - S_v}{V_g - V_v} = \underline{\underline{\frac{L}{T(V_g - V_v)}}}$$

der $L = \underline{\underline{T(S_g - S_v)}}$ er fordampingsvarmen.

[L er varme tilført ved konstant temperatur, $L = \int dQ = \int T\,dS = T\int dS = T(S_g - S_v)$.]

b) Med $V_v << V_g$ og antagelse om ideell gass finner en

$$V_g - V_v = V_g = \frac{RT}{p}$$

slik at

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{RT^2}p$$

$$L = RT^2\frac{1}{p}\frac{dp}{dT} = RT^2\frac{d}{dT}(\ln p).$$

Det gitte uttrykket gir så

$$\ln p = \ln K - \alpha \ln T - \frac{L_1 + \alpha R T_1}{RT}$$

$$\frac{d}{dT}(\ln p) = -\frac{\alpha}{T} + \frac{L_1 + \alpha R T_1}{RT^2},$$

som innsatt gir

$$L = -\alpha R T + L_1 + \alpha R T_1 = \underline{\underline{L_1 + \alpha R(T_1 - T)}}.$$

c) For damptrykket ved henholdsvis $T_0 = 0°C$ og $T_1 = 100°C$ har en

$$\ln p_0 = \ln K - \alpha \ln T_0 - \frac{L_1 + \alpha R T_1}{RT_0}$$

$$\ln p_1 = \ln K - \alpha \ln T_1 - \frac{L_1 + \alpha R T_1}{RT_1}$$

Ved å ta differensen mellom likningene finner en

$$\ln\frac{p_1}{p_0} = -\alpha \ln\frac{T_1}{T_0} - \frac{L_1}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0}\right) - \alpha\left(1 - \frac{T_1}{T_0}\right)$$

$$\ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right) - \frac{L_1}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1}\right) = \alpha\left(\frac{T_1}{T_0} - 1 - \ln\frac{T_1}{T_0}\right)$$

$$\alpha = \frac{\ln\frac{p_1}{p_0} - \frac{L_1}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1}\right)}{\frac{T_1}{T_0} - 1 - \ln\frac{T_1}{T_0}} = \frac{\ln\frac{760}{4{,}58} - \frac{40{,}7\cdot 10^3}{8{,}314}\left(\frac{1}{273} - \frac{1}{373}\right)}{\frac{373}{273} - 1 - \ln\frac{373}{273}}$$

$$= \underline{\underline{5{,}6}}$$

Oppgave 3

a) Volumet av termosen er $V = \frac{4\pi}{3}R^3$ slik at radien blir

$$R = \left(\frac{3}{4\pi}V\right)^{1/3} = \left(\frac{3}{4\pi}0{,}5\,dm^3\right)^{1/3} = \underline{0{,}492\,dm}$$

Overflaten til kulen er dermed

$$A = 4\pi R^2 = \underline{3{,}05\,dm^2}$$

Netto utstrålt effekt mellom lagene blir så

$$P = A(j_{T+\Delta T} - j_T) = A\sigma\left[(T+\Delta T)^4 - T^4\right] = \underline{4A\sigma T^3 \Delta T} + \cdots$$

For å bestemme hvor raskt temperaturen endrer seg når effekten er P, trenger en så varmekapasiteten til vannet i flaska. Denne er

$$C = c_p \cdot m = 4{,}185\,J/gK \cdot 500\,g = \underline{2{,}09 \cdot 10^3\,J/K}$$

Avgitt effekt vil nå være

$$-C\frac{dT}{dt} \qquad (>0)$$

Denne effekten er igjen lik den utstrålte effekten P slik at vi får likningen ($\Delta T = T - T_0$)

$$-C\frac{dT}{dt} = -C\frac{d(\Delta T)}{dt} = P = 4A\sigma T^3 \Delta T$$

eller

$$\frac{d(\Delta T)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\Delta T$$

Denne likningen har løsningen

$$\Delta T = \Delta T_0 e^{-t/\tau}$$

Decay-tiden er følgelig

$$\tau = \frac{C}{4A\sigma T^3} = \frac{2{,}09 \cdot 10^3\,J/K}{4 \cdot 3{,}05 \cdot 10^{-2}\,m^2 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,J/sm^2\,(293K)^3}$$

$$= \underline{\underline{1{,}20 \cdot 10^4\,s}} = \underline{\underline{3\tfrac{1}{3}\text{ time}}}$$

b) Varmestrømmen gjennom korklaget er gitt ved

$$P_k = Aj = A\kappa\left|\frac{\partial T}{\partial r}\right| = A\kappa\frac{\Delta T}{d}$$

Når $P_k = P$ finner en da følgelig

$$A\kappa\frac{\Delta T}{d} = 4A\sigma T^3 \Delta T$$

som gir for tykkelsen av korklaget

$$d = \frac{\kappa}{4\sigma T^3} = \frac{0{,}040\,W/mK}{4 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,W/m^2K^4\,(293K)^3} = \underline{\underline{7{,}0\,mm}}.$$