Eksamen i fag TFY4165
Termisk fysikk, den 3/6-2008.

Forslag til løsning.

(1)

Oppgave 1.

a) For adiabaten fram til V_1 finner en først

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_0 V_0^{\gamma-1}$$
$$V_1 = \underline{\underline{V_0 (T_0/T_1)^{1/(\gamma-1)}}}$$

Ved temperaturene T_1 og T_2 er trykket det samme slik at $pV = RT$ gir

$$p/R = V_1/T_1 = V_2/T_2$$
$$V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1} = \underline{\underline{V_0 \frac{T_2}{T_1}\left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{1/(\gamma-1)}}}$$

Adiabaten mellom V_2 og V_3 gir så

$$V_3 = V_2 \left(\frac{T_2}{T_0}\right)^{1/(\gamma-1)} = V_0 \frac{T_2}{T_1}\left(\frac{T_2}{T_0}\frac{T_0}{T_1}\right)^{1/(\gamma-1)} = \underline{\underline{V_0 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\alpha}}}.$$

der $\alpha = 1 + 1/(\gamma-1) = \underline{\gamma/(\gamma-1)}$.

b) Langs adiabatene tilføres ikke varme, dvs.

$$Q_{01} = Q_{23} = \underline{\underline{0.}}$$

Langs isobaren varmes det opp ved konstant trykk, dvs.

$$Q_{12} = C_p (T_2 - T_1) = \underline{\underline{\alpha R (T_2 - T_1)}}$$

Langs isotermen er tilført varme lik utført arbeid da indre energi er uendret for ideell gass ved konstant temperatur. Når resultatet fra punkt a) benyttes blir følgelig arbeidet

(2)

$$Q_{30} = \int_{V_3}^{V_0} p\,dV = RT_0 \int_{V_3}^{V_0} \frac{dV}{V} = RT_0 \ln\left(\frac{V_0}{V_3}\right)$$
$$= \underline{\underline{\alpha R T_0 \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}} \quad (< 0)$$

c) Utført arbeid W er lik netto tilført varme for en hel syklus ($\Delta U = 0$).

$$W = Q_{12} + Q_{30}.$$

Virkningsgraden blir dermed

$$\eta = \frac{W}{Q_{12}} = 1 + \frac{Q_{30}}{Q_{12}} = \underline{\underline{1 - \frac{T_0 \ln T_2/T_1}{T_2 - T_1}}}.$$

For ideell gass avhenger indre energi kun av temperaturen slik at

$$\Delta U_{31} = C_V (T_1 - T_0) = \underline{\underline{\frac{1}{\gamma-1} R (T_1 - T_0)}}.$$

Langs isotermen tilføres varme ved konstant temperatur. Med $dQ = TdS$ blir da

$$\Delta S_{30} = \frac{Q_{30}}{T_0} = \underline{\underline{\alpha R \ln \frac{T_1}{T_2}}}.$$

Oppgave 2.

a) Likevektsbetingelsene for et system i termisk likevekt er at temperatur, trykk og kjemisk potensial er konstante over systemet.

Ved likevekt vil det kjemiske potensialet for oppløsningsmidlet være det samme på begge sider av membranen, dvs.

$$\mu(p+\Delta p, T, x) = \mu^\circ(p, T).$$

Molbrøken x av tilsatt stoff antas liten slik at kjemisk potensial for ideell blanding kan benyttes.

$$\mu(p+\Delta p, T, x) = \mu^\circ(p+\Delta p, T) + kT\ln(1-x)$$

der μ° er kjemisk potensial for rent oppløsningsmiddel. Utvikler nå om trykket p og finner

$$\mu^\circ(p+\Delta p, T) = \mu^\circ(p,T) + \Delta p\left(\frac{\partial\mu^\circ}{\partial p}\right)_T + \cdots$$

$$= \mu^\circ(p,T) + v\,\Delta p + \cdots$$

der v er volum pr. partikkel

$$v = \left(\frac{\partial\mu^\circ}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial G^\circ}{\partial N}\right)_T = V/N.$$

[Har at $\mu^\circ = G^\circ/N$ for rent stoff.]

Ved å sette inn i likevektsbetingelsen ovenfor ser en at $\mu^\circ(p,T)$ kanselerer og en finner

$$0 = \Delta p\, v + kT\ln(1-x)$$

$$\Delta p = -\frac{kT}{v}\ln(1-x) \approx \frac{kT}{v}x \quad (\text{små } x)$$

Nå er $x = N_x/N = N_A n/N$ der N er det totale antall molekyl, N_x og n en henholdsvis antall molekyl og antall mol oppløst stoff og N_A er Avogadros tall. Videre er så $R = N_A k$ og $V = vN$ er volumet. Resulterende osmotisk trykk blir

$$\Delta p = \frac{kT}{v}\frac{N_A n}{N} = \underline{\underline{\frac{RT}{V}n.}}$$

b) Effekten som tas ut blir

$$P = \Delta p\cdot\Phi = (\Delta p_0 - \Delta p_t)\Phi = \underline{\underline{(\Delta p_0 - \lambda\Phi)\Phi}}$$

Maksimal effekt bestemmes ved derivering

$$0 = \frac{dP}{d\Phi} = \Delta p_0 - 2\lambda\Phi_m$$

$$\lambda = \underline{\frac{\Delta p_0}{2\Phi_m}}$$

Dette gir

$$P_m = \left(\Delta p_0 - \frac{\Delta p_0}{2\Phi}\Phi\right)\Phi = \underline{\frac{1}{2}\Delta p_0\,\Phi_m.}$$

Vannstrømmen ved maksimal effekt blir følgelig

$$\Phi_m = \frac{2P_m}{\Delta p_0} = \frac{2\cdot 85\cdot 10^3\ J/s}{21\cdot 10^5\ Nm/m^3} = 0{,}081\ m^3/s = \underline{\underline{81\ dm^3/s.}}$$

Oppgave 3.

a) Ved derivering finner en

$$\nabla^2 T = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{A}{r} + B\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{A}{r^2}\right) - \frac{2A}{r^3} = \underline{\underline{0}}$$

som viser at varmeledningslikningen er oppfylt. Grensebetingelsene gir likningene

$$\frac{A}{R_1} + B = T_1$$

$$\frac{A}{R_2} + B = T_2$$

som gir

$$A\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = T_1 - T_2$$

$$A = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \underline{\underline{\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}(T_1 - T_2)}}$$

$$B = T_2 - \frac{A}{R_2} = T_2 - \frac{R_1}{R_2 - R_1}(T_1 - T_2) = \underline{\underline{\frac{R_2 T_2 - R_1 T_1}{R_2 - R_1}}}$$

Den radielle varmestrømtettheten er gitt ved

$$j = -\kappa \frac{\partial T}{\partial r} = -\kappa \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{A}{r} + B\right) = \frac{\kappa A}{r^2}$$

Med kuleareal $S = 4\pi r^2$ blir varmestrømmen

$$\dot{Q} = S j = 4\pi r^2 \frac{\kappa A}{r^2} = \underline{\underline{4\pi\kappa \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}(T_1 - T_2)}}$$

Følgelig

$$\underline{\underline{D = 4\pi\kappa \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.}}$$

b) Ved å løse uttrykket for D med hensyn på κ finner en

$$\kappa = \underline{\frac{(R_2 - R_1)D}{4\pi R_1 R_2}} = \frac{(0{,}15 - 0{,}10)\,\mathrm{m} \cdot 0{,}18\,\mathrm{W/K}}{4\pi\, 0{,}10 \cdot 0{,}15\,\mathrm{m}^2} = \underline{\underline{0{,}048\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{mK}}}}.$$

Volum av hulrom

$$V = \frac{4\pi}{3} R_1^3.$$

Vekten av isen blir da $M = \rho V$ slik at total smeltevarme blir $Q = ML$. Tiden for å smelte isen blir følgelig

$$t = \frac{Q}{|\dot{Q}|} = \frac{\rho V L}{|\dot{Q}|} = \frac{4\pi \rho R_1^3 L}{3 \cdot D(T_2 - T_1)} =$$

$$\frac{4\pi \cdot 0{,}92\,\mathrm{kg/dm^3}(1{,}0\,\mathrm{dm})^3 \cdot 333\,\mathrm{kJ/kg}}{3 \cdot 0{,}18\,\mathrm{W/K} \cdot (20-0)\,\mathrm{K}} = \underline{\underline{3{,}56 \cdot 10^5\,\mathrm{s}}} =$$

$$\underline{\underline{99\ \text{timer} = 4{,}1\ \text{døgn}}}$$

c) Når alle lengder endres med en faktor α endres tiden med en faktor α^2. Med dette blir tiden for smelting

$$t_\alpha = \alpha^2 t = 1{,}2^2 t = \underline{\underline{5{,}13 \cdot 10^5\,\mathrm{s} = 142\ \text{timer} = 5{,}9\ \text{døgn}}}$$