Eksamen i fag TFY4165/FY1005
Termisk fysikk, den 29/5 - 09.

Forslag til løsning.

Oppgave 1

a) Differensiering av indre energi gir

$$dU = C_V\, dT + \frac{a}{V^2}\, dV$$

som innsatt i den termodynamiske identitet gir

$$T dS = dU + p dV = C_V dT + \frac{a}{V^2} dV + \left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right) dV$$

$$= C_V dT + RT \frac{dV}{V-b}$$

$$dS = C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V-b}$$

Integrert gir dette

$$S = \underline{\underline{C_V \ln T + R \ln(V-b) + \text{konst.}}}$$

Dvs. $\underline{\underline{A = C_V,\ B = R \text{ og } V_0 = b.}}$

b) Arbeidet langs isotermen er

$$W_1 = \int_{V_1}^{V_2} p\, dV = \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{RT_1}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right) dV$$

$$= \Big|_{V_1}^{V_2} \left(RT_1 \ln(V-b) + \frac{a}{V}\right) dV = \underline{\underline{RT_1 \ln\left(\frac{V_2-b}{V_1-b}\right) + a\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right).}}$$

Langs adiabaten er entropien uendret ($TdS = dQ = 0$ for reversibel prosess). Følgelig

$$C_v \ln T_1 + R\ln(V_1 - b) = C_v \ln T_2 + R\ln(V_2 - b)$$

$$\ln T_2 = \ln T_1 + \frac{R}{C_v}\left[\ln(V_1-b) - \ln(V_2-b)\right]$$

$$= \ln T_1 + \ln\left(\frac{V_1-b}{V_2-b}\right)^{R/C_v}$$

$$T_2 = \underline{\underline{T_1 \left(\frac{V_1-b}{V_2-b}\right)^{R/C_v}}}.$$

Arbeidet langs adiabaten tas fra indre energi da tilført varme er lik null, dvs. $0 = Q = \Delta U + W$. Utført arbeid er følgelig

$$W_2 = -\Delta U = -(U_2 - U_1) = \underline{\underline{C_v(T_1 - T_2) - a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)}}.$$

c) Energibevarelse krever at tilført varme Q_2 pluss varme Q_1 fra kjøleskapet må være lik avgitt varme.

$$Q_1 + Q_2 = Q_0$$

Reversibel prosess gir best effektivitet og minst Q_2. Da er entropien uendret. Med $dQ = TdS$ finner en da

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_0}{T_0} = \frac{Q_1 + Q_2}{T_0}$$

$$Q_1\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0}\right) = Q_2\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_2}\right)$$

$$Q_2 = \underline{Q_1 \frac{T_2(T_0 - T_1)}{T_1(T_2 - T_0)}} = 2{,}5\,\text{kJ}\cdot\frac{353(30-2)}{275(80-30)} = \underline{\underline{1{,}80\,\text{kJ}}}.$$

Oppgave 2

a) Etter Boltzmanns prinsipp er entropien

$$S = k \ln W$$

der W er antall mikrotilstander. Ved blanding øker W da nye konfigurasjoner dannes ved at ulike partikler bytter plass. Med N_i partikler av komponent i kan partiklene byttes om på

$$W = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{c} N_i!} \qquad \left(N = \sum_{i=1}^{c} N_i\right)$$

ulike måter. Disse ulike konfigurasjonene gir blandingsentropien

$$\Delta S_{mix} = k \ln W = k\left[\ln(N!) - \sum_{i=1}^{c} \ln(N_i!)\right].$$

Bruk av oppgitt formel gir så

$$\ln N! = N \ln N - N + \ln\sqrt{2\pi N} \xrightarrow[N\to\infty]{} N \ln N - N$$

$$\left(\text{da } \frac{1}{N}\ln\sqrt{2\pi N} \to 0 \text{ når } N \to \infty\right)$$

Med $N = \sum_{i=1}^{c} N_i$ gir så dette

$$\Delta S_{mix} = k\left[N \ln N - \sum_{i=1}^{c} N_i \ln N_i\right] = -k N_i \ln\left(N_i/N\right)$$

$$= -k \sum_{i=1}^{c} N_A n_i \ln\left(\frac{N_A n_i}{N_A n}\right) = \underline{\underline{-R \sum_{i=1}^{c} n_i \ln\left(\frac{n_i}{n}\right)}}.$$

der N_A er Avogadros tall $\left(R = N_A k,\ n_i = \frac{N_i}{N_A}\right)$.

b) Med $dQ = TdS = dH - Vdp$ har en for de spesifikke varmer

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$$

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - V\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

der en har benyttet

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T dp$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

Ved å benytte den gitte relasjonen blir differensen

$$C_p - C_V = -\left[\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T - V\right]\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \underline{\underline{T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}}.$$

Fra oppgitt relasjon har en så $\left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y^{-1}\right)$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = -1$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T^{-1}!$$

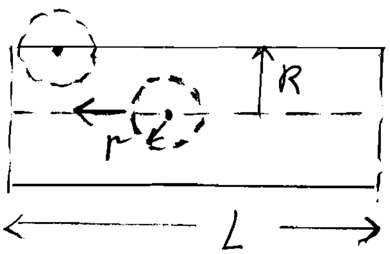
Innsatt gir dette

$$C_p - C_V = -T\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)^{-1}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p^2 = TV\frac{\alpha^2}{K} =$$

$$298\,K \cdot 2 \cdot 10^{-3}\,m^3 \,\frac{(48{,}5 \cdot 10^{-6}\,K^{-1})^2}{7{,}7 \cdot 10^{-12}\,(N/m^2)^{-1}} = \underline{\underline{182\ J/K.}}$$

Oppgave 3.

a)



En partikkel som beveger seg vil kollidere med partikler som ligger innenfor en radius $R = 2r$ når den selv beveger seg langs sylinderaksen. Volum av sylinder med radius R og lengde L blir så

$$V_s = \pi R^2 L = 4\pi r^2 L$$

Med tetthet N/V blir antall partikler innenfor denne

$$N_s = \frac{N}{V} V_s = \frac{N}{V} 4\pi r^2 L$$

Midlere fri veilengde blir dermed

$$\lambda = \frac{L}{N_s} = \underline{\underline{\frac{V}{4\pi r^2 N}}}$$

Med $N = n \cdot N_A$ finner en så

$$\lambda = \frac{V}{4\pi r^2 n N_A} = \frac{3{,}0\,m^3}{4\pi \cdot (0{,}15 \cdot 10^{-9})^2 m^2 \cdot 2{,}0 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}$$

$$= \underline{\underline{8{,}8 \cdot 10^{-6}\,m}}.$$

b) Arealet på endeflatene av sylinderen (ring av bredde b)

$$A = 2\pi R b$$

Med varmestrømtetthet $j_x = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \rightarrow j = -\kappa \frac{T_0 - T}{L}$, blir varmestrømmen langs sylinderen

$$\dot{Q} = jA = \kappa\frac{T-T_0}{L}A = \underline{\frac{2\pi Rb}{L}\kappa(T-T_0)}$$

$$= \frac{2\pi\cdot 1{,}8\cdot 10^{-2}\,m\cdot 0{,}50\cdot 10^{-3}\,m}{4{,}0\cdot 10^{-2}\,m}\, 46\,W/m.K \cdot 50\,K = \underline{\underline{3{,}25\,W.}}$$

c) Energien (eller varmemengden) i det indre av termosen er $U = C\Delta T + \text{konst}$ slik at

$$\dot{Q} = -\frac{dU}{dt} = -C\Delta\dot{T}.$$

Dette gir differensiallikningen

$$\underline{\underline{C\,\Delta\dot{T} = -\frac{2\pi Rb\kappa}{L}\Delta T.}}$$

Med $\Delta T = A\exp(-\alpha t)$ blir $\Delta\dot{T} = -\alpha\Delta T$.
Ved innsetting blir følgelig

$$C\alpha = \frac{2\pi Rb\kappa}{L}$$

$$\alpha = \underline{\underline{\frac{2\pi Rb\kappa}{LC}.}}$$

Temperaturen er redusert til halvparten av sin startverdi når

$$e^{-\alpha\tau} = \frac{1}{2}$$

$$-\alpha\tau = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

$$\tau = \frac{\ln 2}{\alpha} = \frac{(\ln 2)LC}{2\pi Rb\kappa} = \frac{\ln 2\cdot 4\cdot 10^{-2}\,m\cdot 2{,}9\,kJ}{2\pi\cdot 1{,}8\cdot 10^{-2}\,m\cdot 0{,}5\cdot 10^{-3}\,m\cdot 46\,W/m.K}$$

$$= \underline{\underline{3{,}1\cdot 10^{4}\,s}} = \underline{\underline{8{,}6\text{ timer.}}}$$