Eksamen i fag TFY4165
Termisk fysikk, den 15/8-09.

Forslag til løsning.

Oppgave 1

a) Differensiering av enthalpien gir $dH = C_p\, dT$.
For volumet har en fra ideell gass likning $V = RT/p$. Innsatt i $TdS = dH - Vdp$ finner en så

$$dS = \frac{1}{T} C_p\, dT - \frac{R}{p}\, dp$$

Integrert gir dette

$$S = C_p \ln T - R \ln p + \text{konst.}$$

Dvs. $A = C_p$ og $B = R$.

b) Som for porøs plugg strømmer energien $H_1 = U_1 + p_1 V_1$ inn mens energien $H_2 = U_2 + p_2 V_2$ strømmer ut av systemet. Her strømmer i tillegg energien Q inn i gassen mens den befinner seg i systemet. Energibalansen blir følgelig

$$H_1 + Q = H_2$$
$$C_p T_1 + Q = C_p T_2$$
$$Q = C_p (T_2 - T_1)$$

c) Entropien $S_1 = C_p \ln T_1 - R \ln p_1 + \text{konst}$ strømmer inn i systemet mens $S_2 = C_p \ln T_2 - R \ln p_2 + \text{konst}$ strømmer ut. I tillegg kommer entropien Q/T_1 ved varmeoverføring. Ved reversibel prosess er da

$$S_1 + \frac{Q}{T_1} = S_2$$

$$C_p \ln T_1 - R \ln p_1 + \text{konst} + \frac{Q}{T_1} = C_p \ln T_2 - R \ln p_2 + \text{konst}$$

Varmemengden Q kan nå elimineres ved å sette inn uttrykket fra punkt b. En kan så dividere på R og finner så

$$\alpha \left(\ln \frac{T_1}{T_2} + \frac{T_2 - T_1}{T_1} \right) = \ln \frac{p_1}{p_2}$$

der $\alpha = C_p / R$. Ved å ta eksponensialfunksjonen av dette finner en så

$$p_1 = p_2 \left[\frac{T_1}{T_2} \exp\left(\frac{T_2 - T_1}{T_1} \right) \right]^{\alpha}$$

Numerisk finner en

$$p_1 = 1{,}00 \text{ atm} \left[\frac{293}{258} \exp\left(\frac{258 - 293}{293} \right) \right]^{3{,}5}$$

$$= 1{,}00 \text{ atm} \, (1{,}1356 \cdot 0{,}8874)^{3{,}5} = 1{,}028 \text{ atm}$$

Oppgave 2

a) Fra $G = U - TS + pV$ finner en først

$$dG = dU - TdS - SdT + pdV + Vdp$$

Dette benyttes så til å eliminere dU i den termodynamiske identitet

$$TdS = dU + pdV$$

som så gir

$$dG = -SdT + Vdp$$

Av dette finner en først

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -S \quad \text{og} \quad \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T = V$$

Ved å derivere 2 ganger finner en så

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)$$

eller $$\underline{-\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}$$

Når en erstatter U med $H = U + pV$ i den termodynamiske identitet finnes

$$dH = dU + pdV + Vdp$$

som innsatt gir

$$TdS = dH - Vdp$$

Fra denne likningen følger så

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T - V$$

Ved å benytte Maxwellrelasjonen følger dermed

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = V + T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \underline{\underline{V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}}$$

b) For Joule-Thompson koeffisienten finner vi

$$\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{-1}{\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial H}\right)_T} = \frac{-1}{C_p}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T$$

Her har vi først benyttet $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_T \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -1$.
Videre er $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z^{-1} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$ benyttet, og tilslutt er spesifikk varme ved konstant trykk

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$$

Ved å sette inn resultatet fra punkt a) følger så

$$\underline{\underline{\mu_{JT} = \frac{1}{C_p}\left[T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V\right]}}$$

c) Differensiering av tilstandslikningen gir

$$0 = dp = \left(\frac{R}{V} + \frac{dB}{dT}\frac{1}{V^2}\right)dT - \left(\frac{RT}{V^2} + 2\frac{B}{V^3}\right)dV$$

$$T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = V\left(R + \frac{dB}{dT}\frac{1}{V}\right)/\left(R + 2\frac{B}{TV}\right)$$

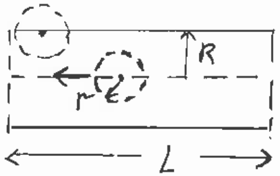
og følgelig $$\mu_{JT} = \frac{1}{C_p}\left(T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V\right)$$

$$= \frac{1}{C_p} V\left(R + \frac{dB}{dT}\frac{1}{V} - R - 2\frac{B}{TV}\right)/\left(R + 2\frac{B}{TV}\right) = \frac{1}{C_p}\left(\frac{dB}{dT} - \frac{2B}{T}\right)/\left(R + 2\frac{B}{TV}\right)$$

$$\xrightarrow{V \to \infty} \underline{\frac{1}{C_p}\,\frac{1}{R}\left(\frac{dB}{dT} - \frac{2B}{T}\right).}$$

Oppgave 3.

a)



En partikkel som beveger seg vil kollidere med partikler som ligger innenfor en radius $R = 2r$ når den selv beveger seg langs sylinderaksen. Volum av sylinder med radius R og lengde L blir så

$$V_s = \pi R^2 L = 4\pi r^2 L$$

Med tetthet N/V blir antall partikler innenfor denne

$$N_s = \frac{N}{V} V_s = \frac{N}{V} 4\pi r^2 L$$

Midlere fri veilengde blir dermed

$$\lambda = \frac{L}{N_s} = \frac{V}{4\pi r^2 N}$$

Med $N = n \cdot N_A$ finner en så

$$\lambda = \frac{V}{4\pi r^2 n N_A} = \frac{3{,}0\,m^3}{4\pi \cdot (0{,}15 \cdot 10^{-9})^2 m^2 \cdot 2{,}0 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}$$

$$= 8{,}8 \cdot 10^{-6}\,m.$$

b) Arealet på endeflatene av sylinderen (ring av bredde b)

$$A = 2\pi R b$$

Med varmestrømtetthet $j_x = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \rightarrow j = -\kappa \frac{T_0 - T}{L}$, blir varmestrømmen langs sylinderen

$$\dot{\Phi} = jA = \kappa \frac{T - T_0}{L} A = \frac{2\pi R b}{L} \kappa (T - T_0)$$

$$= \frac{2\pi \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-2} m \cdot 0{,}50 \cdot 10^{-3} m}{4{,}0 \cdot 10^{-2} m} 46 \frac{W}{m \cdot K} \cdot 50\,K = 3{,}25\,W.$$

c) Energien (eller varmemengden) i det indre av termosen er $U = C\Delta T + \text{konst}$ slik at

$$\dot{\Phi} = -\frac{dU}{dt} = -C\Delta\dot{T}.$$

Dette gir differensialligningen

$$C\Delta\dot{T} = -\frac{2\pi R b \kappa}{L} \Delta T.$$

Med $\Delta T = A \exp(-\alpha t)$ blir $\Delta\dot{T} = -\alpha \Delta T$.
Ved innsetting blir følgelig

$$C\alpha = \frac{2\pi R b \kappa}{L}$$

$$\alpha = \frac{2\pi R b \kappa}{L C}.$$

Temperaturen er redusert til halvparten av sin startverdi når

$$e^{-\alpha\tau} = \frac{1}{2}$$

$$-\alpha\tau = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

$$\tau = \frac{\ln 2}{\alpha} = \frac{(\ln 2) L C}{2\pi R b \kappa} = \frac{\ln 2 \cdot 4 \cdot 10^{-2} m \cdot 2{,}9\,kJ}{2\pi \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-2} m \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3} m \cdot 46\,W/m \cdot K}$$

$$= 3{,}1 \cdot 10^4\,s = 8{,}6\ \text{timer}.$$