Eksamen i fag TFY 4165
Termisk fysikk, den 8/6 - 2011.

Forslag til Løsning.

Oppgave 1.

a) Ved å eliminere p i adiabatlikningen $pV^\gamma = \text{konst}$ finner en $RTV^\gamma/V = \text{konst}$ eller $TV^{\gamma-1} = \text{konst}$. For adiabaten fram til T_2 finner en da følgelig

$$T_0 V_0^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$
$$V_2 = \underline{\underline{V_0 (T_0/T_2)^{1/(\gamma-1)}}}.$$

Adiabaten mellom T_0 og T_1 gir tilsvarende

$$T_0 V_1^{\gamma-1} = T_1 V_2^{\gamma-1}$$
$$V_1 = V_2\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{1/(\gamma-1)} = \underline{\underline{V_0\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{1/(\gamma-1)}}}.$$

b) Langs adiabatene tilføres ikke varme, dvs.

$$Q_{12} = Q_{20} = \underline{\underline{0}}.$$

Langs isokoren varmes det opp ved konstant trykk, dvs

$$Q_{22} = C_V(T_2 - T_1) = \underline{\underline{\frac{R}{\gamma-1}(T_2 - T_1)}}$$

da $C_p - C_V = (\gamma-1)C_V = R$ eller $C_V = \underline{\underline{\frac{R}{\gamma-1}}}.$

Langs isotermen er tilført varme lik utført arbeid da indre energi er uendret for ideell gass ved konstant temperatur. Når resultatet fra punkt a) benyttes blir følgelig arbeidet

$$Q_{01} = \int_{V_0}^{V_1} p\,dV = RT_0 \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V} = RT_0 \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)$$
$$= \underline{\underline{\frac{RT_0}{\gamma-1}\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}}. \qquad (<0)$$

c) Utført arbeid W er lik netto tilført varme for en hel syklus ($\Delta U = 0$).

$$W = Q_{22} + Q_{01}$$

Virkningsgraden blir dermed

$$\eta = \frac{W}{Q_{22}} = 1 + \frac{Q_{01}}{Q_{22}} = \underline{\underline{1 - \frac{T_0 \ln(T_2/T_1)}{T_2 - T_1}}}.$$

For ideell gass avhenger enthalpien kun av temperaturen. En har at $H = U + pV = C_V T + RT = C_p T$. Følgelig

$$\Delta H = \underline{\underline{C_p(T_1 - T_0)}}.$$

Langs isotermen tilføres varme ved konstant temperatur. Med $dQ = T\,dS$ blir da

$$\Delta S = \frac{Q_{01}}{T_0} = \underline{\underline{\frac{R}{\gamma-1}\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}}.$$

[En kan alternativt integrere mellom T_2 og T_1, $\Delta S = \int_{T_2}^{T_1} \frac{C_V dT}{T} = C_V \ln(T_1/T_2)$, $dS = 0$ langs adiabatene.]

Oppgave 2

a) Med henholdsvis N_+ og N_- spinn med og mot magnetfeltet blir antall konfigurasjoner

$$W = \frac{N!}{N_+!\,N_-!} \qquad \text{der } N = N_+ + N_-$$

Med $Nm = N_+ - N_-$ følger så

$$N_+ = \tfrac{1}{2}(1+m)N \quad \text{og} \quad N_- = \tfrac{1}{2}(1-m)N.$$

Videre med $\ln N! = \ln\sqrt{2\pi N} + N\ln N - N \to N\ln N - N$, $N \to \infty$, blir følgelig entropien

$$S = k\ln W = k(\ln N! - \ln N_+! - \ln N_-!) =$$

$$k\left[N\ln N - N - (N_+\ln N_+ - N_+) - (N_-\ln N_- - N_-)\right] = k\left[-N_+\ln\frac{N_+}{N} - N_-\ln\frac{N_-}{N}\right] = Nk\left[-\tfrac{1}{2}(1+m)\ln\left(\tfrac{1}{2}(1+m)\right) - \tfrac{1}{2}(1-m)\ln\left(\tfrac{1}{2}(1-m)\right)\right]$$

$$= Nk\left[\ln 2 - \tfrac{1}{2}(1+m)\ln(1+m) - \tfrac{1}{2}(1-m)\ln(1-m)\right].$$

Dvs: $A = \ln 2$ og $B = C = \frac{1}{2}$.

b) Differensiering gir

$$dF = dU - S\,dT - T\,dS$$

slik at ved innsetting for $dU = S\,dT + Nh\,dm$ finner en

$$dF = -S\,dT + Nh\,dm.$$

Likningen for h kan nå bestemmes fra F ved derivering. Med $F = U - ST = -ST$

og likningen for dF finner en for $h = h(T, m)$

$$h = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial F}{\partial m}\right)_T = -\frac{T}{N}\left(\frac{\partial S}{\partial m}\right)_T =$$

$$-kT\frac{d}{dm}\left[\ln 2 - \tfrac{1}{2}(1+m)\ln(1+m) - \tfrac{1}{2}(1-m)\ln(1-m)\right] =$$

$$-kT\left[-\tfrac{1}{2}\ln(1+m) - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\ln(1-m) + \tfrac{1}{2}\right] = \tfrac{1}{2}kT\ln\left(\frac{1+m}{1-m}\right).$$

c) Entropien er gitt ved (C = konst)

$$S = \int dS = \int\frac{dQ}{T} = \int\frac{C}{T}\,dT = C\ln T + \text{konst}.$$

Energibevarelse bestemmer sluttemperaturen T_s

$$2C\,T_s = C\,T_a + C\,T_b$$

$$T_s = \tfrac{1}{2}(T_a + T_b).$$

Endring i entropi blir følgelig

$$\Delta S = S_s - S_a - S_b = 2C\ln T_s - C\ln T_a - C\ln T_b$$

$$= C\ln\frac{(T_a + T_b)^2}{4T_aT_b} \quad \left[= C\ln\left(1 + \frac{(T_a - T_b)^2}{4T_1T_2}\right) > 0\right].$$

Dersom prosessen er reversibel vil entropien være uendret. Sluttemperaturen T_0 blir da

$$0 = \Delta S = C\left[2\ln T_0 - \ln T_a - \ln T_b\right] = C\ln\left(\frac{T_0^2}{T_aT_b}\right),$$

$$T_0 = \sqrt{T_aT_b}.$$

Oppgave 3.

a) Med lineært temperaturprofil gjennom veggene vil de i middel måtte oppvarmes

$$\Delta T = \tfrac{1}{2}(20-(-10))^\circ C = \underline{15^\circ C}, \quad \text{dvs. } \Delta T = \underline{15 K.}$$

Med volum av veggene $V = AL$ blir varmekapasiteten til veggene

$$C = cAL = 1350\, kJ/m^3 K \cdot 85 m^2 \cdot 0{,}20\, m = \underline{2{,}3 \cdot 10^4 kJ/K.}$$

Oppvarmingsbehovet blir da

$$Q = C \cdot \Delta T,$$

som gir tid for oppvarming

$$t = \frac{Q}{P_0} = \frac{2{,}3 \cdot 10^4\, kJ/K \cdot 15 K}{4{,}0\, kJ/s} = \underline{8{,}6 \cdot 10^4 s}$$

$$\approx \underline{24\, timer} = \underline{1\, døgn.}$$

b) Varmestrømtetthet gjennom veggene ved stasjonære forhold

$$j = -\kappa \frac{dT}{dx} = \kappa \frac{\Delta T_t}{L}$$

der

$$\Delta T_t = (20-(-10))^\circ C = \underline{30^\circ C}, \text{ dvs. } \underline{30 K.}$$

Effekten fra ovnen P er så lik total varmestrøm

$$P = jA = \kappa A \frac{\Delta T_t}{L}$$

$$= 0{,}14\, W/(m\cdot K) \cdot 85 m^2 \cdot \frac{30 K}{0{,}20 m} \approx \underline{\underline{1{,}8\, kW.}}$$

c) Med ideell gass er partikkeltettheten

$$n = \frac{p}{kT}$$

slik at partikkelstrømmen blir

$$J = Aj = -AD\nabla n = AD\frac{n_2 - n_1}{L}$$

$$= \underline{\frac{AD}{LkT}(p_2 - p_1).}$$

Masse pr. vannmolekyl

$$m = \frac{M}{N_A}, \quad \text{der } M = 18\, g/mol.$$

Massestrømmen blir følgelig ($N_A k = R$, $N = 1\, Nm$)

$$J_m = mJ = \underline{\frac{MAD}{LRT}(p_2 - p_1)}$$

$$= \frac{18\, g/mol \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-4} m^2 \cdot 3 \cdot 10^{-5} m^2/s}{0{,}1 m \cdot 8{,}314\, J/(mol \cdot K) \cdot 293 K}(2{,}2 - 1{,}2) \cdot 10^3 N/m^2$$

$$= \underline{\underline{3{,}3 \cdot 10^{-7} g/s}} = \underline{\underline{1{,}2 \cdot 10^{-3} g/time}} = \underline{\underline{0{,}20\, g/uke.}}$$