Eksamen i fag TFY4165/FY1005
Termisk fysikk, den 7/8-2012.

Forslag til Løsning.

Oppgave 1

a) Differensiering av indre energi gir

$$dU = C_v dT + \frac{a}{V^2} dV$$

som innsatt i den termodynamiske identitet gir

$$T dS = dU + p dV = C_v dT + \frac{a}{V^2} dV + \left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right) dV$$

$$= C_v dT + RT \frac{dV}{V-b}$$

$$dS = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V-b}$$

Integrert gir dette

$$\underline{\underline{S = C_v \ln T + R \ln(V-b) + \text{konst.}}}$$

Dvs. $A = C_v$, $B = R$ og $V_0 = b$.

b) Arbeidet langs isotermen er

$$W_1 = \int_{V_1}^{V_2} p\, dV = \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{RT_1}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right) dV$$

$$= \Big|_{V_1}^{V_2} \left(RT_1 \ln(V-b) + \frac{a}{V}\right) = \underline{\underline{RT_1 \ln\frac{V_2-b}{V_1-b} + a\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right)}}.$$

Langs adiabaten er entropien uendret. ($TdS = dQ = 0$ for reversibel prosess). Dette betyr at

$$C_v \ln T_1 + R \ln(V_1-b) = C_v \ln T_2 + R \ln(V_2-b)$$

$$\ln T_2 = \ln T_1 + \frac{R}{C_v}\left[\ln(V_1-b) - \ln(V_2-b)\right] = \ln T_1 + \ln\left(\frac{V_1-b}{V_2-b}\right)^{R/C_v}.$$

$$\underline{\underline{T_2 = T_1 \left(\frac{V_1-b}{V_2-b}\right)^{R/C_v}.}}$$

Arbeidet langs adiabaten fås fra indre energi da tilført varme er lik 0, dvs. $0 = Q = \Delta U + W$. Utført arbeid er følgelig

$$W_2 = -\Delta U = -(U_2 - U_1) = \underline{\underline{C_v(T_1 - T_2) - a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right).}}$$

c) Virkningsgraden til kjølepumpa

$$\varepsilon = \frac{Q_1}{W} = \frac{8{,}5\text{ MJ}}{5{,}4\text{ MJ}} = \underline{\underline{1{,}57.}}$$

Avlevert varme til omgivelsene

$$Q_2 = 8{,}5\text{ MJ} + 5{,}4\text{ MJ} = \underline{13{,}9\text{ MJ.}}$$

Total endring av entropi er gitt ved

$$\Delta S = \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} = \left(\frac{13{,}9}{298} - \frac{8{,}5}{253}\right)\frac{\text{MJ}}{\text{K}} = \underline{\underline{13{,}0\text{ kJ/K.}}}$$

Det teoretisk minste arbeidet er bestemt av at total entropiendring er lik 0. Da må en ha

$$\Delta S = \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} = 0$$

$$Q_2 = \frac{T_2}{T_1} Q_1 = \frac{298}{253} \cdot 8{,}5\text{ MJ} = \underline{10{,}01\text{ MJ.}}$$

Minste mulig arbeid tilført blir følgelig

$$W_{min} = Q_2 - Q_1 = (10{,}01 - 8{,}5)\text{ MJ} = \underline{\underline{1{,}51\text{ MJ.}}}$$

[Bruk av Carnot virkningsgrad gir det samme, $Q_2 = (T_2/T_1) Q_1$.]

Oppgave 2.

a) Med henholdsvis N_+ og N_- spinn med og mot magnetfeltet blir antall konfigurasjoner

$$W = \frac{N!}{N_+!\,N_-!} \qquad \text{der} \quad N = N_+ + N_-$$

Med $N_m = N_+ - N_-$ følger så

$$N_+ = \tfrac{1}{2}(1+m)N \quad \text{og} \quad N_- = \tfrac{1}{2}(1-m)N.$$

Videre med $\ln N! = \ln\sqrt{2\pi N} + N\ln N - N \to N\ln N - N$, $N\to\infty$, blir følgelig entropien

$$S = k\ln W = k(\ln N! - \ln N_+! - \ln N_-!)$$

$$= k\left[N\ln N - N - (N_+\ln N_+ - N_+) - (N_-\ln N_- - N_-)\right] = k\left[-N_+\ln\frac{N_+}{N} - N_-\ln\frac{N_-}{N}\right] = Nk\left[-\tfrac{1}{2}(1+m)\ln\left(\tfrac{1}{2}(1+m)\right) - \tfrac{1}{2}(1-m)\ln\left(\tfrac{1}{2}(1-m)\right)\right]$$

$$= \underline{Nk\left[\ln 2 - \tfrac{1}{2}(1+m)\ln(1+m) - \tfrac{1}{2}(1-m)\ln(1-m)\right].}$$

Dvs. $A = \underline{\ln 2}$ og $B = C = \underline{\tfrac{1}{2}}.$

b) Tilstandsligningen blir

$$h = -\frac{T}{N}\frac{dS}{dm} =$$

$$-kT\frac{d}{dm}\left[\ln 2 - \tfrac{1}{2}(1+m)\ln(1+m) - \tfrac{1}{2}(1-m)\ln(1-m)\right]$$

$$= -kT\left[-\tfrac{1}{2}\ln(1+m) - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\ln(1-m) + \tfrac{1}{2}\right] = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}kT\ln\left(\frac{1+m}{1-m}\right).}}$$

Her avhenger entropien $S = S(B, m)$ kun av m. Når en først setter på magnetfeltet h isotermt vil m øke (da T = konst). Når så magnetfeltet slåes av igjen med S = konst vil m være uendret slik at

$m_2 = m_1$. Dette betyr at

$$\frac{h_2}{T_2} = \frac{h_1}{T_1}$$

slik at resulterende temperatur blir

$$\underline{\underline{T_2 = \frac{h_2}{h_1}T_1.}}$$

c) Effekten som kan tas ut blir

$$P = \Delta p\cdot\Phi = (\Delta p_0 - \Delta p_t)\Phi = (\Delta p_0 - \lambda\Phi)\Phi.$$

Konstanten λ bestemmes ved at $\Delta p_0 = \lambda\Phi_0$, dvs.

$$\lambda = \frac{\Delta p_0}{\Phi_0}$$

slik at

$$P = \underline{\Delta p_0\left(1 - \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)\Phi} = \underline{\Delta p_0\Phi_0\left(1 - \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)\frac{\Phi}{\Phi_0}.}$$

Maksimal effekt bestemmes ved derivering

$$0 = \frac{\partial P}{\partial\Phi} = \Delta p_0\left(1 - \frac{2\Phi}{\Phi_0}\right)$$

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\Phi_0.$$

Maksimal effekt blir

$$P_M = \Delta p_0\Phi_0\left(1 - \tfrac{1}{2}\right)\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}\Delta p_0\Phi_0$$

$$= \tfrac{1}{4}\,23\cdot 1{,}013\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}\cdot 0{,}125\,\mathrm{m^3/s} = 7{,}28\cdot 10^4\,\mathrm{J/s} \approx \underline{\underline{73\,\mathrm{kW}.}}$$

Oppgave 3

a) En kan først sette $a = \frac{m}{2kT}$. Ved å bruke oppgitt uttrykk blir da midlere kvadratiske hastighet

$$\langle v^2 \rangle = \int v^2 F(v)\, d\vec{v} = 4\pi \int_0^\infty v^2 \left(\frac{a}{\pi}\right)^{3/2} e^{-av^2} v^2 dv$$

$$= 4\pi \left(\frac{a}{\pi}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\frac{1}{a^2} = \underline{\underline{3\frac{kT}{m}.}}$$

[Alternativt: $F(v) = g(v_x)\,g(v_y)\,g(v_z)$, $g(v_x) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/2} e^{-av_x^2}$,

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2\, g(v_x)\, dv_x = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 \sqrt{\frac{a}{\pi}}\, e^{-av_x^2} dv_x = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\frac{1}{2}\frac{1}{a} = \frac{kT}{m},$$

dvs. $\langle v^2 \rangle = 3\langle v_x^2 \rangle = \frac{3kT}{m}.$]

b) For likeformede problemer ved varmeledning er sammenhengen mellom tider og avstander gitt ved

$$t_2 = a^2 t_1 \quad \text{og} \quad r_2 = a r_1.$$

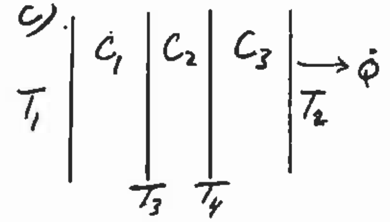
Massen er proporsjonal med volumet ($\sim r^3$) slik at skalafaktoren a blir

$$a = \frac{r_2}{r_1} = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{1/3} = \left(\frac{2{,}5\, m_1}{m_1}\right)^{1/3} = \underline{1{,}357.}$$

Tiden for avkjøling av massen m_2 blir dermed

$$t_2 = a^2 t_1 = (1{,}357)^2 \cdot 110\,\text{min} = \underline{\underline{203\,\text{min}}} \approx \underline{\underline{3\tfrac{1}{3}\ \text{time.}}}$$

c)



Det går samme varmestrøm gjennom alle lagene slik at

$$\dot{\Phi} = \dot{\Phi}_1 = \dot{\Phi}_2 = \dot{\Phi}_3$$

For temperaturforskjellene har en da

$$\Delta T_1 = T_1 - T_3 = \frac{\dot{\Phi}_1}{C_1} = \frac{1}{C_1}\dot{\Phi}$$

$$\Delta T_2 = T_3 - T_4 = \frac{\dot{\Phi}_2}{C_2} = \frac{1}{C_2}\dot{\Phi}$$

$$\Delta T_3 = T_4 - T_2 = \frac{\dot{\Phi}_3}{C_3} = \frac{1}{C_3}\dot{\Phi}$$

Ved å legge sammen disse likningen finner en så

$$T_1 - T_2 = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)\dot{\Phi} = \frac{1}{C}\dot{\Phi}$$

slik at

$$\dot{\Phi} = \underline{\underline{C(T_1 - T_2).}}$$

der

$$\underline{\underline{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}} \quad \text{eller} \quad \underline{\underline{C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)^{-1}.}}$$