Eksamen Termisk fysikk

05.12.2015 09.00 - 13.00

Løsningsforslag

Oppgave 1

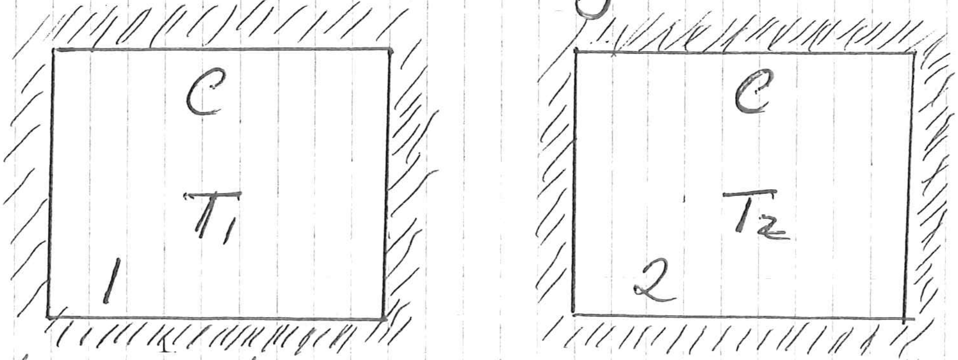
a) U: Middelverdi av systemets kinetiske og potensielle energi.

$H = U + pV$: Middelverdi av systemets kinetiske og potensielle energi, pluss energien som skal til for å "lage plass" til systemet i volumet V ved spesifisert trykk.

$F = U - TS$: Den delen av et systems mekaniske energi som er tilgjengelig for å gjøre nyttig arbeid ved spesifisert volum og temperatur.

$G = H - TS$: Samme som F, men ved spesifisert trykk og temperatur

b)



Varme kan flyte fra varmt til kaldt reservoar og kan benyttes til å gjøre arbeid.

(2)

Termodynamikkens 1. lov

$Q_t = \Delta U_t + W$

Q_t: Totalt tilført varme fra omgivelsene. Her er $Q_t = 0$

W: Arbeid som gjøres.

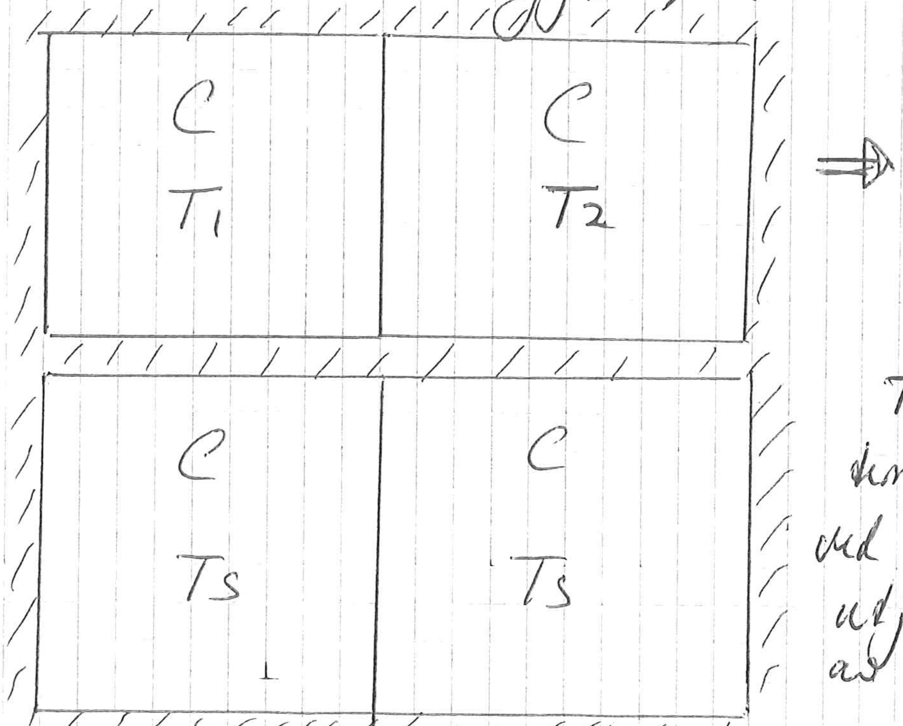
Termodynamikkens 2. lov

$\Delta S_t \geq 0$

$U_t = U_1 + U_2$

$S_t = S_1 + S_2$

i) Se først på tilfellet der varme flyter irreversibelt mellom 1 og 2 uten at arbeid gjøres, $W = 0$



Her: T_s = Slutt-temperatur ved irreversibel utjevning av temperaturen.

$\Delta S > 0$ Irreversibelt

$\Delta U_t = 0$ ($Q_t = 0$, $W = 0$)

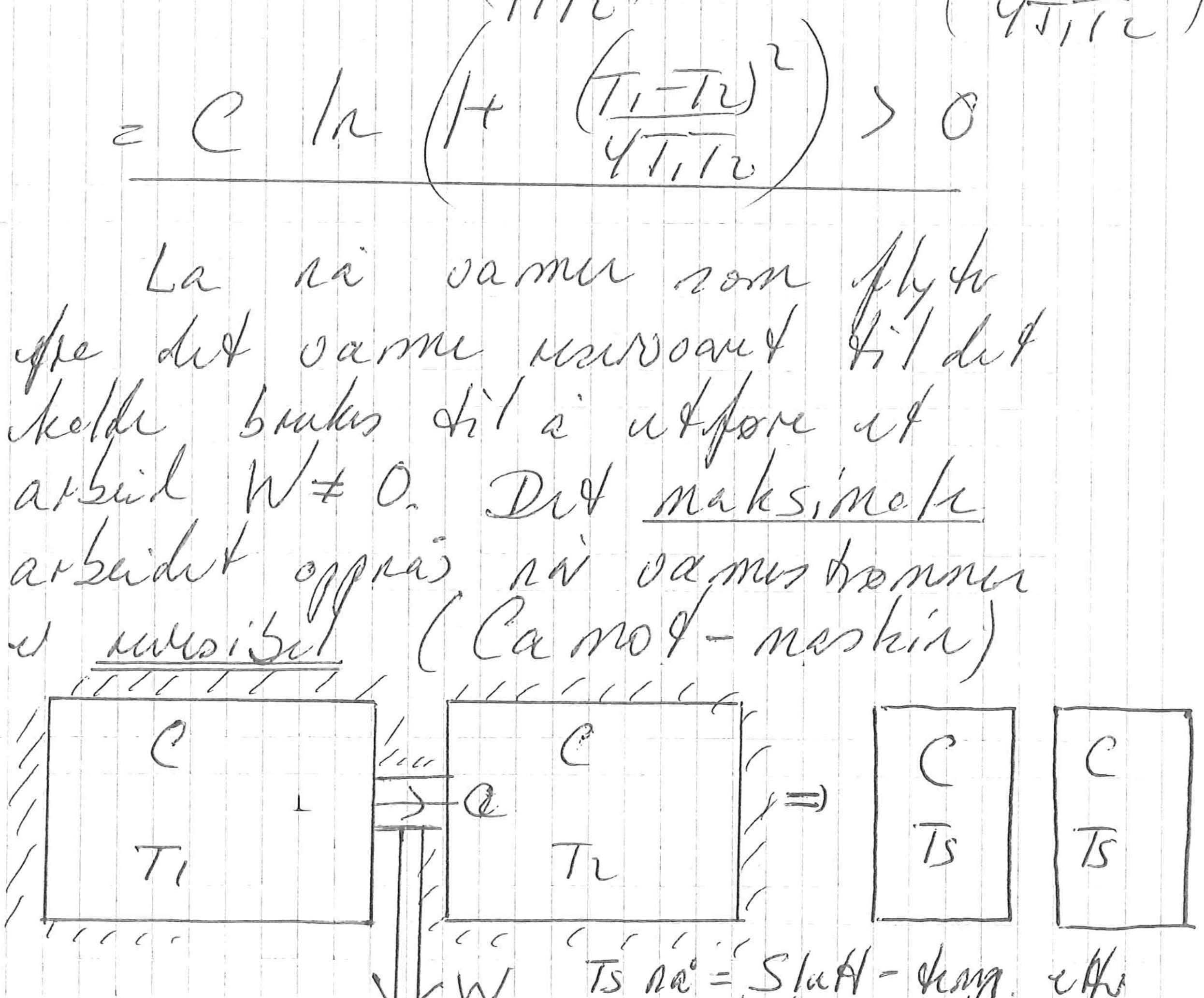
$$\Delta U_t = \Delta U_1 + \Delta U_2$$
$$= C\,(T_S - T_1) + C\,(T_S - T_2)$$
$$= C\,(2T_S - T_1 - T_2) = 0$$

$$\underline{T_S = \frac{T_1 + T_2}{2}}$$

Numerisk:
$\underline{T_S = 312.5\ K}$

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$$
$$= C \int_{T_1}^{T_S} \frac{dT}{T} + C \int_{T_2}^{T_S} \frac{dT}{T}$$
$$= C \ln\left(\frac{T_S^2}{T_1 T_2}\right) = C \ln\left(\frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2}\right)$$
$$\underline{= C \ln\left(1 + \frac{(T_1-T_2)^2}{4T_1T_2}\right) > 0}$$

ii) La nå varmen som flyter fra det varme reservoaret til det kalde brukes til å utføre et arbeid $W \neq 0$. Det maksimale arbeidet oppnås når varmestrømmen er reversibel (Carnot-maskin)



T_S nå = Slutt-temp. etter reversibel T-utjevning.

④

Reversibilitet $\Rightarrow \quad \Delta S = 0$

1. lov: $\quad Q_{tot} = 0 = \Delta U_{tot} + W_{max}$

$$W_{max} = -\Delta U_{tot}$$

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

$$= C \ln\left(\frac{T_S^2}{T_1 T_2}\right) = 0$$

$$\underline{\underline{T_S = \sqrt{T_1 T_2}}}$$

Numerisk: $\quad T_S = \sqrt{350 \cdot 275} = \underline{\underline{310\,K}}$

Dette er mindre enn T_S vi fant under pkt i).

Vi kunne sett dette generelt:

Kall T_S i pkt i) T_S^{I}

Kall T_S i pkt ii) T_S^{R}

$$T_S^{I} - T_S^{R} = \frac{T_1 + T_2}{2} - \sqrt{T_1 T_2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{T_1}\right)^2 + \left(\sqrt{T_2}\right)^2 - 2\sqrt{T_1}\cdot\sqrt{T_2}}{2}$$

$$\underline{\underline{= \frac{1}{2}\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}\right)^2 > 0}}$$

c) Det maximale arbeidet W_{max}:

$$W_{max} = -\Delta U_t = -(\Delta U_1 + \Delta U_2)$$

$$= +[C(T_1 - T_S) + C(T_2 - T_S)]$$

$$= +C[T_1 + T_2 - 2T_S]$$

$$= +C(T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2})$$

$$\underline{\underline{= C(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2}}$$

Numerisk:

$$W_{max} = 4.8 \cdot 10^7 (\sqrt{350} - \sqrt{275})^2$$

$$= 4.8 \cdot 10^7 (18.71 - 16.58)^2$$

$$= 4.8 \cdot 10^7 \cdot 4.52$$

$$\underline{\underline{= 21.7 \cdot 10^7 \text{ J}}}$$

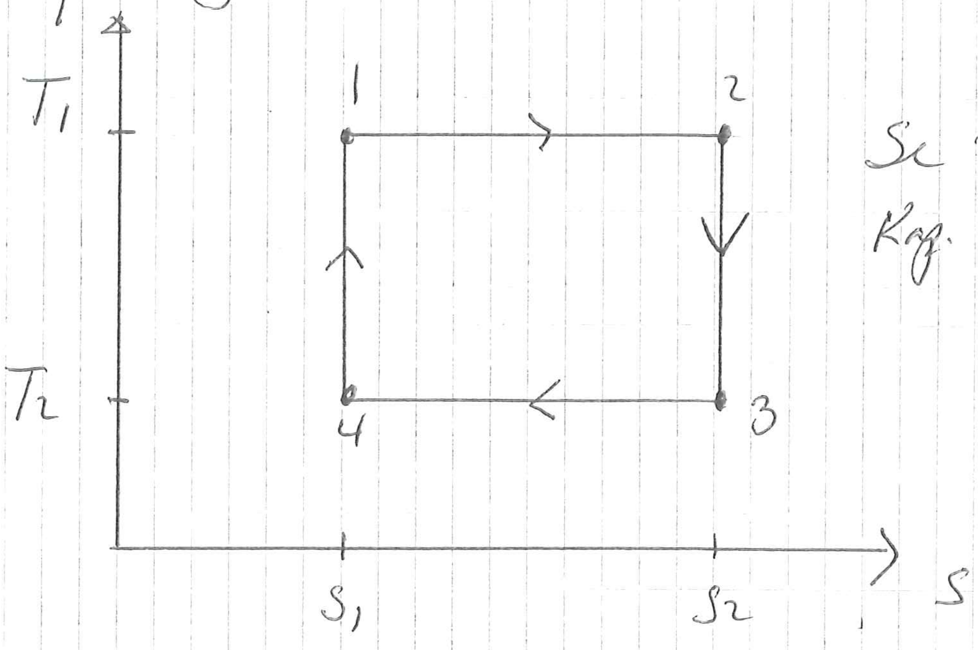
Se forøvrig P. C. H. Kap. 5.3

d) Effekten $= \dfrac{W_{max}}{\Delta t}$, der Δt er tiden det tar å gjennomføre den reversible temperatur-utjevningen. En reversibel prosess tar uendelig lang tid, $\Delta t \to \infty$. $\underline{\underline{\text{Effekten} = 0}}$

Oppgave 2

$$T\,dS = dH + \mu_0\, dH \cdot M$$

a) Carnot-prosess i (T, S) diagram



Se P.C.H Kap. 4.3

b) Virkningsgrad $\eta = \dfrac{W}{Q_1}$

Q_1: Tilført varme (T_1)
Prosess $1 \to 2$

$W = Q_1 - |Q_2|$

Q_2: Avgitt varme (T_2)
Prosess $3 \to 4$

$$dQ_1 = T_1\, dS \Rightarrow Q_1 = T_1 \int_{S_1}^{S_2} dS$$

$$Q_1 = T_1 (S_2 - S_1)$$

$$dQ_2 = T_2\, dS \Rightarrow Q_2 = T_2 \int_{S_2}^{S_1} dS$$

$$Q_2 = T_2 (S_1 - S_2)$$

$$Q_1 = T_1(S_2 - S_1) > 0$$

$$Q_2 = -|Q_2| = -T_2(S_2 - S_1) < 0$$

$$\eta = \frac{T_1(S_2-S_1) - T_2(S_2-S_1)}{T_1(S_2-S_1)}$$

$$= \underline{1 - \frac{T_2}{T_1}}$$

Helt uavh. av arbeidssubstans, kun avhengig av temperaturer til reservoarene.

<u>Kommentar:</u> All informasjon om hva slags arbeidssubstans vi bruker, ligger kodet i

$$\Delta S \equiv S_1 - S_2$$

Denne størrelsen kansellerer ut i η og grunnen til dette er at $dQ = TdS$, dvs. prosessen er reversibel.

c) $T\,dS = dH + \mu_0 M\, d\mathcal{H}$

(Gass-system: $T\,dS = dU + p\,dV = dH - V\,dp$)

$p \to -\mu_0 \mathcal{H}, \quad V \to M$

Oppgitt $\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V \Rightarrow$

$$-\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial H}{\partial \mathcal{H}}\right)_T = -T\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{\mathcal{H}} + M$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \mathcal{H}}\right)_T + \mu_0 M = \mu_0 T\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{\mathcal{H}} \qquad (*)$$

$$T\,dS = dH + \mu_0 M\, d\mathcal{H}$$

$$= \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{\mathcal{H}} dT + \left(\left(\frac{\partial H}{\partial \mathcal{H}}\right)_T + \mu_0 M\right) d\mathcal{H}$$

$$T\,dS = C_{\mathcal{H}}\, dT + \mu_0 T\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{\mathcal{H}} d\mathcal{H} \qquad (* \text{ innsatt})$$

$$M = C\,\frac{\mathcal{H}}{T} \Rightarrow \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{\mathcal{H}} = -C\,\frac{\mathcal{H}}{T^2}$$

$$T\,dS = C_{\mathcal{H}}\, dT - \mu_0 C\,\frac{\mathcal{H}}{T}\, d\mathcal{H}$$

Adiabat: $dQ = T\,dS = 0$

$$C_{\mathcal{H}}\, T\,dT - \mu_0 C\, \mathcal{H}\, d\mathcal{H} = 0$$

$$\underline{C_{\mathcal{H}}\, T^2 - \mu_0 C\, \mathcal{H}^2 = \text{constant.}}$$

For å finne (*), s. 8, kunne vi istedet nyttet direkte uten bruk av oppgitte formler og substitusjon $p \to -\mu_0 \mathcal{H}$, $V \to M$, slik:

$$T dS = dH + \mu_0 M d\mathcal{H} \quad (**)$$

$$= \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{\mathcal{H}} dT + \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \mathcal{H}}\right)_T + \mu_0 M\right] d\mathcal{H}$$

Vi trenger å forenkle uttrykket i klammeparentes, og gjør dette ved den samme metoden som gir 4.18 i P.C.H

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\mathcal{H}} dT + \left(\frac{\partial S}{\partial \mathcal{H}}\right)_T d\mathcal{H} \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\mathcal{H}} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{\mathcal{H}}; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial \mathcal{H}}\right)_T = \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial \mathcal{H}}\right)_T + \mu_0 M\right]$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial \mathcal{H}} = \frac{\partial^2 S}{\partial \mathcal{H} \partial T} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{T}\frac{\partial^2 H}{\partial \mathcal{H} \partial T} = \frac{1}{T}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial T \partial \mathcal{H}} + \mu_0 \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{\mathcal{H}}\right]$$

$$- \frac{1}{T^2}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial \mathcal{H}}\right)_T + \mu_0 M\right] \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \mathcal{H}}\right)_T + \mu_0 M = \mu_0 T \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{\mathcal{H}}$$

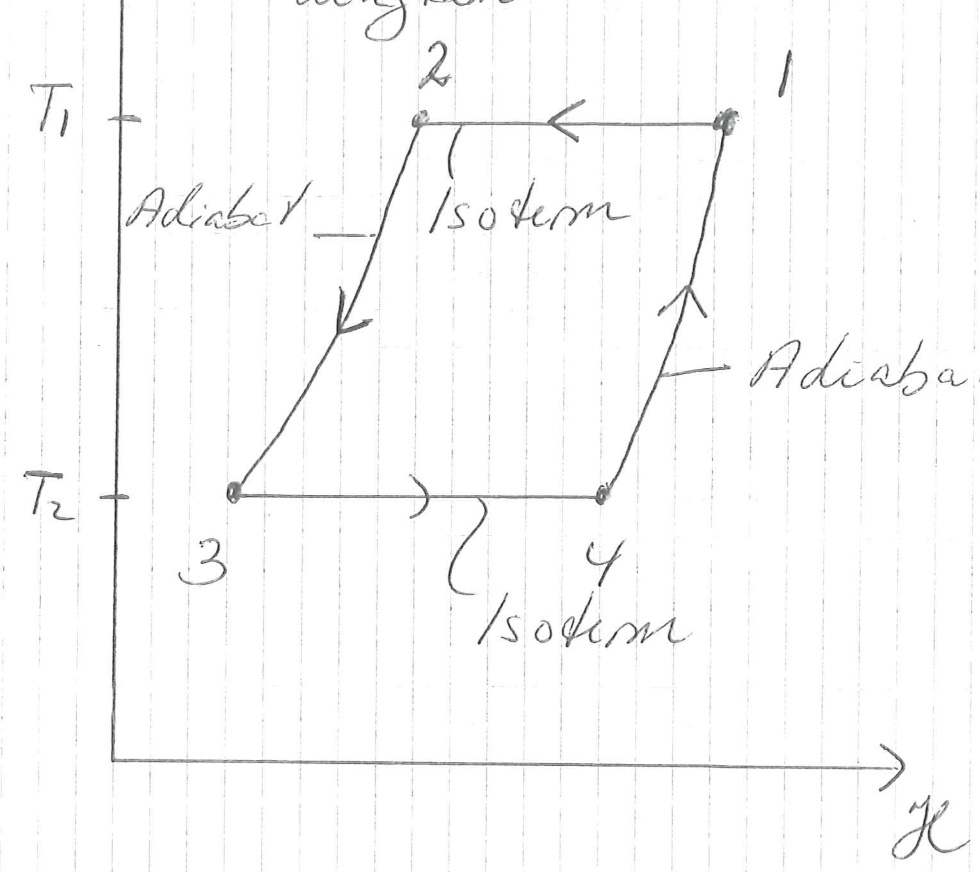
som er ligning (*), s. 8

Innsatt i (**) gir dette

$$T dS = C_{\mathcal{H}} dT + \mu_0 T \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{\mathcal{H}} d\mathcal{H}$$

$$T dS = C_{\mathcal{H}} dT - \mu_0 C \frac{\mathcal{H}}{T} d\mathcal{H} \quad \text{(ideell magnet)}$$

d) Carnot-prosessen i $(T, \mathcal{H})$-diagram



$$T\,dS = C_{\mathcal{H}}\,dT - \mu_0 C \frac{\mathcal{H}}{T}\,d\mathcal{H}$$

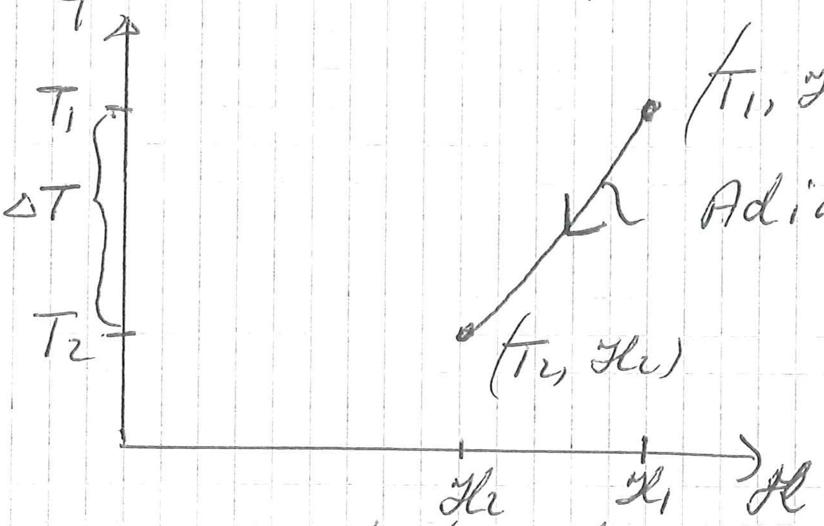
$1 \to 2$: Varme tilføres $(T\,dS > 0)$
isotermt ved $T_1 \Rightarrow d\mathcal{H} < 0$

$2 \to 3$: Adiabatisk prosess

$3 \to 4$: Varme avgis $(T\,dS < 0)$
isotermt ved $T_2 \Rightarrow d\mathcal{H} > 0$

$4 \to 1$: Adiabatisk prosess

e) Vi ser nå på adiabatisk kjøling mellom to temperaturer (T_1, T_2) og to ytre magnetfelt ($\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$)



$\mathcal{H}_1 > \mathcal{H}_2$

$T_1 > T_2$

Langs adiabaten har vi

$C_\mathcal{H} T^2 - \mu_0 \mathcal{H}^2 =$ konstant

$$C_\mathcal{H} T_1^2 - \mu_0 C \mathcal{H}_1^2 = C_\mathcal{H} T_2^2 - \mu_0 C \mathcal{H}_2^2$$

$$C_\mathcal{H}(T_1^2 - T_2^2) = \mu_0 C (\mathcal{H}_1^2 - \mathcal{H}_2^2)$$

V.S.: $C_\mathcal{H}(T_1^2 - T_2^2) = C_\mathcal{H}(T_1 - T_2)(T_1 + T_2)$

$= C_\mathcal{H} \Delta T \cdot (T_1 + T_1 - \Delta T)$

$= C_\mathcal{H} \Delta T \cdot (2T_1 - \Delta T) \simeq 2T_1 C_\mathcal{H} \Delta T$

Siste tilnærmelse gjelder for $\Delta T \ll T_1$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\Delta T = \frac{\mu_0 C}{2T_1 C_\mathcal{H}} (\mathcal{H}_1^2 - \mathcal{H}_2^2)}}$$

Kommentar: Vi får mest effektiv kjøling for en magnet med stor evne til å bli magnetisert av et magnetfelt, samtidig som den har liten varmekapasitet.

Oppgave 3

Midlere fart:

$$\langle v\rangle = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty dv\, v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

Innfør $\gamma = \frac{m}{2kT}$

Vi må regne ut integralet

$$\int_0^\infty dv\, v^3 e^{-\gamma v^2}$$

Innfør $u = v^2$
$v\,dv = \frac{1}{2}du$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty du\, u\, e^{-\gamma u}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{d}{d\gamma}\underbrace{\int_0^\infty du\, e^{-\gamma u}}_{=1/\gamma} = \frac{1}{2\gamma^2}$$

$$\langle v\rangle = 4\pi\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{3/2}\frac{1}{2\gamma^2} = 2\sqrt{\frac{1}{\pi\gamma}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} = \boxed{\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}}$$ (Se PCH 9.16)

Dersom den største verdien av denne $\langle v\rangle$ er mindre enn unnslippingshastigheten, kan molekylært hydrogen eksistere i atmosfæren på Ganymede.

$\langle v \rangle_{max}$ oppnås ved $T_{max} = 152\ K$

$$\langle v \rangle_{max} = \sqrt{\frac{8 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 152}{3.14 \cdot 3.36 \cdot 10^{-27}}}\ \text{):}\ m/s$$

$$= \sqrt{\frac{8 \cdot (1.38) \cdot (1.52)}{3.14 \cdot (3.36)}} \cdot 10^{3}\ m/s$$

$$\underline{\underline{= 1261\ m/s}} \quad < 2700\ m/s$$

I følge dette estimatet vil molekylært hydrogen kunne eksistere i atmosfæren på Ganymede.

Kommentar: En kunne også sett på $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ og fått samme konklusjon.

Hastigheten i H_2-gassen er normalfordelt, så det finnes en hale i fordelingen der partiklene har større ~~hastighet~~ fart enn $\langle v \rangle$. Denne halen blir bredere når m er liten, derfor forventer en at mengden av H_2 er relativt lav.

$$\left.\begin{aligned} \langle v \rangle &= \sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{kT}{m}} \\ \sqrt{\langle v^2 \rangle} &= \sqrt{3\frac{kT}{m}} \\ \left(\langle v^4 \rangle\right)^{1/4} &= \sqrt{\sqrt{15}\frac{kT}{m}} \end{aligned}\right\}$$

Alle disse gir samme konklusjon

b) Vi bruker igjen

(14)

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$\langle v \rangle < 2700 \, m/s$ for at

CH_4 skal kunne eksistere i Ganymedes atmosfære

$$\sqrt{\frac{8 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot T}{\pi \, 2.66 \cdot 10^{-26}}} < 2700 \, m/s$$

$$T < T_{max}$$

$$T_{max} = \left(2.7 \cdot 10^{3}\right)^{2} \cdot \frac{\pi m}{8k} \; \text{K}$$

$$= \frac{(2.7)^2 \cdot 3.14 \cdot 2.66 \cdot 10^{-26} \cdot 10^{6}}{8 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23}}$$

$$= \frac{(2.7)^2 \cdot (3.14) \cdot (2.66)}{8 \cdot 1.38} \cdot 10^{3}$$

$$= \cancel{5515} \quad \underline{5515 \text{ K}}$$

Dette er langt høyere enn temperaturen noensinne vill kunne bli på Ganymedes overflate. Atmosfæren inneholder mye metan (CH_4)

c) Totalt utstrålt effekt fra sola:

$P = A \cdot \sigma T^4$, der σ er Stefan-Boltzmann konstanten

$A = 4\pi R_{sol}^2$

$T = 5800\,K$

$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$

$R_{sol} = 7 \cdot 10^8\,m$

$$P = 4\pi (7)^2 \cdot 10^{16} \cdot (5.67 \cdot 10^{-8}) \cdot (5.8)^4\, 10^{12}\, W$$

$$= 4\pi \cdot 49 \cdot 5.67 \cdot (5.8)^4 \cdot 10^{20}\, W$$

$$= \underline{\underline{3.95 \cdot 10^{26}\, W}}$$

Denne utstrålte energien fra sola fordeler seg jevnt på ~~[illegible]~~ enhver kuleflate en legger rundt sola. Stasjonære forhold betyr at P er konstant på enhver slik kuleflate. La kuleflata ha radius R_0. Da er innstrålingen fra sola pr. arealenhet på en slik flate gitt ved

$$P_{inn}(R_0) = \frac{P}{4\pi R_0^2}$$

Her: $R_0 = 820 \cdot 10^9\, m$

Ganymede har radius $R_G = 2.6\cdot 10^6$ m og projiserer et areal πR_G^2 mot strålingen fra sola.

Innstrålt effekt på Ganymede fra sola blir da:

$$P_{inn,G} = P\cdot \frac{\pi R_G^2}{4\pi R_0^2} = \frac{1}{4}\cdot P\left(\frac{R_G}{R_0}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 3.95\cdot 10^{26}\left(\frac{2.6\cdot 10^6}{8.2\cdot 10^{11}}\right)^2 \quad D:\ W$$

$$\underline{\underline{= 9.93\cdot 10^{14}\ W}}$$

d) Kraften pr. flateenhet som strålingen utøver på Ganymede, i termisk likevekt, er trykket i fotongassen på Ganymedes overflate.

Oppsett: $u = \alpha T^4$ $\qquad U = u\cdot V$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right) - p$$

$$\alpha T^4 = T\frac{dp}{dT} - p$$

Ser at $p = \gamma T^4$ er en løsning

$$\alpha T^4 = (4\gamma - \gamma)T^4 = 3\gamma T^4$$

$$\gamma = \frac{\alpha}{3} \Rightarrow p = \frac{u}{3}$$

$$\sigma T^4 = \frac{c}{4}\cdot \alpha T^4 \Rightarrow \alpha = \frac{4\sigma}{c}$$

$$p = \frac{1}{3}\alpha T^4 = \frac{1}{3}\,\frac{4\sigma}{c}T^4 = \frac{4}{3c}\cdot j_{inn}$$

$$j_{inn,a} = \frac{P_{inn,a}}{2\pi R_a^2} = \sigma T^4$$

Fra dette bestemmer vi $p = \frac{1}{3}\alpha T^4$

$$p = \frac{1}{3}\,\frac{4}{c}\,\sigma T^4 = \frac{4}{3c}\cdot j_{inn,a}$$

$$= \frac{4}{3c}\cdot\frac{P_{inn,a}}{2\pi R_a^2}$$

$$= \frac{4}{3\cdot 3\cdot 10^8}\cdot\frac{9.93\cdot 10^{14}}{2\cdot 3.14\cdot(7.6\cdot 10^{6})^2} \quad \text{o:} \quad \frac{N}{m^2}$$

$$= \frac{4}{9}\cdot\frac{9.93}{6.28}\cdot\frac{1}{6.76}\cdot 10^{14-8-12}\,\frac{N}{m^2}$$

$$= 1.0396\cdot 10^{-6}\,\frac{N}{m^2} = \underline{\underline{1.04\cdot 10^{-7}\,\frac{N}{m^2}}}$$

$\approx 1\cdot 10^{-12}$ atmosfære