Eksamen i Termisk fysikk

12.08.2016

Løsningsforslag

1a: U: Middelverdi av kinetisk + potensiell energi

H = U + energien som skal til for å skaffe rom til volumet V ved spesifisert trykk

F: Energi tilgjengelig for nyttig arbeid ved spesifisert (T, V)

G: Det samme som F, men ved spesifisert (T, p)

b) 1. lov:

$$\Delta Q = \Delta U + W$$

$$\Delta Q = 0$$

$$\Delta S \geq 0$$

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2$$

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

c) Varme flyter irreversibelt fra $1 \to 2$

$W = 0$

$$\Delta U = 0 = \Delta U_1 + \Delta U_2$$

$$= 2C\,(T_S - T_1) + C\,(T_S - T_2)$$

$$= C\,(3T_S - T_2 - 2T_1) = 0$$

(2)

$$T_S^i = \frac{1}{3}(2T_1 + T_2)$$

ii) Reversibel prosess, slik at maksimalt arbeid utføres:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

$$= 2C \int_{T_1}^{T_S} \frac{dT}{T} + C \int_{T_2}^{T_S} \frac{dT}{T}$$

$$= 2C \ln\left(\frac{T_S}{T_1}\right) + C \ln\left(\frac{T_S}{T_2}\right)$$

$$= C \ln\left(\frac{T_S^3}{T_1^2 T_2}\right) = 0$$

$$T_S^r = \left(T_1^2 T_2\right)^{1/3}$$

Skal nå vise at $T_S^r < T_S^i$

At dette er rimelig, følger fra det faktum at i reversibel prosess, har noe energi gått med til å utføre et arbeid, og derfor tappet systemet for energi i større grad enn om arbeid ikke hadde blitt utført.

Innfører $x = T_1^{1/3}$

$y = T_2^{1/3}$

Se på: $2x^3 + y^3 - 3x^2 y =$

$$= 2x^2(x-y) + y(x^2-y^2)$$

$$= (x-y)\left[2x^2 - y(x+y)\right]$$

$$= (x-y)\left[x^2-y^2+x^2-yx\right]$$

$$= (x-y)\left[(x-y)(x+y)+(x-y)\cdot x\right]$$

$$= (x-y)^2(2x+y) \geq 0$$

$$2T_1+T_2-3\left(T_1^2T_2\right)^{1/3} > 0$$

$$T_S^i - T_S^f > 0$$

<u>1c</u>

$$W_{max} = -\Delta U$$

$$= 2C(T_1-T_S) + C(T_2-T_S)$$

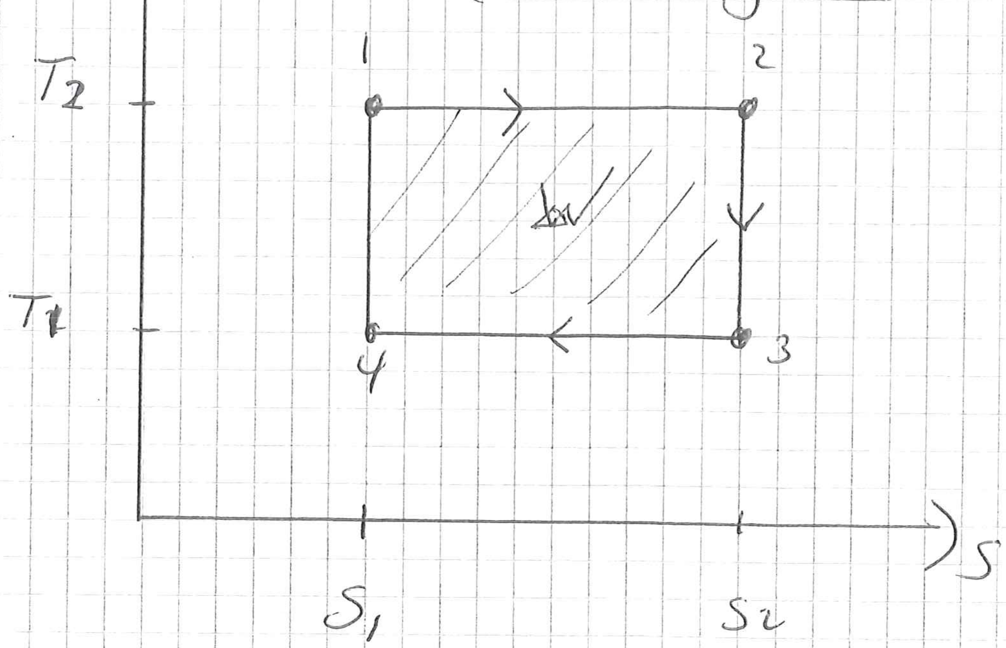
$$= C(2T_1+T_2-3T_S)$$

$$= C\left(2T_1+T_2-3\left(T_1^2T_2\right)^{1/3}\right) \geq 0$$

$$= C\left(T_1^{1/3}-T_2^{1/3}\right)^2\left[2T_1^{1/3}+T_2^{1/3}\right]$$

2a

Carnot-prosess i (S, T)-diagram



b) Virkningsgrad $\eta = \frac{Q_{12} + Q_{34}}{Q_{12}} = \frac{W}{Q_{12}}$

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{T_2 \Delta S - T_1 \Delta S}{T_2 \Delta S}$$

$$= 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

ΔS inneholder all info om arbeids-substans. Denne kanselleres ut av η, som derfor er helt uavhengig av arbeids-substans.

c) Fra det som vi oppgitt på formelark, finner vi

$$-\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\partial H}{\partial \mathcal{E}}\right)_T = -T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\mathcal{E}} + P$$

$$T\,dS = dH + \varepsilon_0 P\, d\mathcal{E}$$

$$= C_{\mathcal{E}}\, dT + \left(\left(\frac{\partial H}{\partial \mathcal{E}}\right)_T + \varepsilon_0 P\right) d\mathcal{E}$$

$$= C_{\mathcal{E}}\, dT + \varepsilon_0 T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\mathcal{E}} d\mathcal{E}$$

$$P = C\,\frac{\mathcal{E}}{T}$$ Oppgitt tilstandslign.

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\mathcal{E}} = -C\,\frac{\mathcal{E}}{T^2}$$

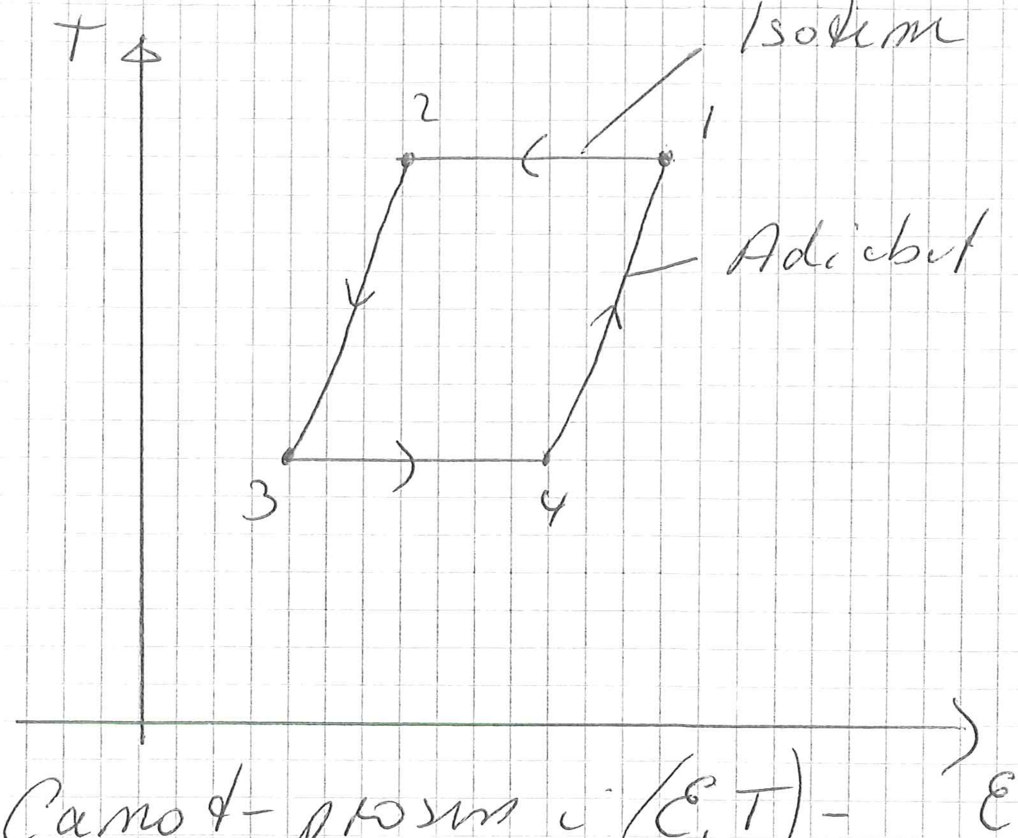
$$T\,dS = C_{\mathcal{E}}\, dT - \varepsilon_0 C\,\frac{\mathcal{E}}{T}\, d\mathcal{E}$$

$T\,dS = 0$ i adiabatisk prosess

$$0 = C_{\mathcal{E}}\, T\, dT - \varepsilon_0 C\, \mathcal{E}\, d\mathcal{E}$$

$$\underline{C_{\mathcal{E}}\, T^2 - \varepsilon_0 C\, \mathcal{E}^2 = \text{konstant}}$$

d)



Carnot-prosess i $(\mathcal{E}, T)$-diagram.

e)

$$C_{\mathcal{E}} T^2 - \varepsilon_0 C \mathcal{E}^2 = \text{konstant}$$

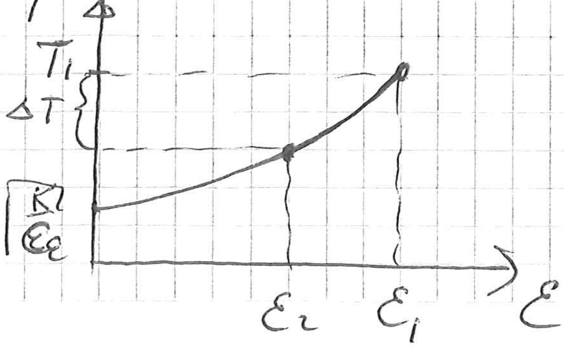
$$C_{\mathcal{E}} T_1^2 - \varepsilon_0 C \mathcal{E}_1^2 = C_{\mathcal{E}} T_2^2 - \varepsilon_0 C \mathcal{E}_2^2$$

$$C_{\mathcal{E}} \underbrace{\left(T_1^2 - T_2^2\right)} = \varepsilon_0 C \left(\mathcal{E}_1^2 - \mathcal{E}_2^2\right)$$

$$(T_1 - T_2)(T_1 + T_2) = \Delta T \left(2T_1 - \Delta T\right)$$

$$\simeq \Delta T \cdot (2T_1)$$

$$\Delta T = \frac{\varepsilon_0 C}{2 T_1 C_{\mathcal{E}}} \left(\mathcal{E}_1^2 - \mathcal{E}_2^2\right)$$



3a Klassisk ekv. p. prinsipp:

Hver uavh. kvadratiske frihetsgrad bidrar $\frac{1}{2} kT$ til indre energi ($\frac{1}{2} k$ til C_V)

Id - bevegelse

Massesenter - bevegelse $\frac{p_x^2}{2M}$: $\frac{1}{2} k$

Relativ - bevegelse $\frac{1}{2} k x^2 + \frac{p^2}{2m_r} =$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k + \frac{1}{2} k = k$$

Totalt: $\underline{\underline{C_V = \frac{3}{2} k}}$

b)

$$F = N kT \ln\left(2 \sinh\left(\frac{\beta \hbar \omega}{2}\right)\right)$$

$$F = U - TS$$

$$U = F + TS = F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$$

$$= F + \beta\left(\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)_V = \left(\frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta}\right)_V$$

$$\underline{U = N \frac{\hbar \omega}{2} \coth\left(\frac{\beta \hbar \omega}{2}\right)}$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = -\frac{1}{kT^2}\frac{\partial U}{\partial \beta}$$

$$= -k_B\,\beta^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \beta}\right)_V$$

$$\frac{\partial U}{\partial \beta} = -N\left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^2 \frac{+1}{\sinh^2\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}$$

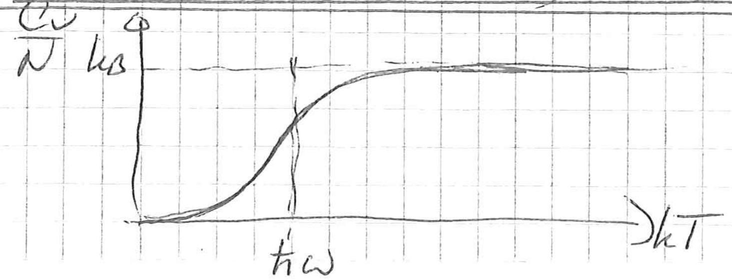
$$C_V = k_B \cdot N \left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)^2 \frac{1}{\left(\sinh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)\right)^2}$$

$\frac{\beta\hbar\omega}{2} \ll 1 \Rightarrow$ large T

$C_V = N \cdot k_B$ $\qquad \underbrace{\frac{1}{2}Kx^2}_{kT/2} + \underbrace{\frac{1}{2}m v_x^2}_{kT/2}$

$\frac{\beta\hbar\omega}{2} \gg 1 \Rightarrow$ low T

$$C_V = N k_B \left(\beta\hbar\omega\right)^2 e^{-\beta\hbar\omega}$$



c)

100 K: Da er

$\beta \hbar \omega >> 1$

~~Gir~~

I gassen beskrevet i oppgave 1 er det massesenter-bevegelse + en harmonisk-oscillator del fra relativ-bevegelsen.

Når $\beta \hbar \omega >> 1$ gir oscillator delen ingen bidrag til C, vi står kun igjen med bidraget fra massesenter-bevegelsen

$$\underline{\underline{C = \frac{1}{2} k}} \quad \text{pr. partikkel}$$