Løsningsforslag TFY4165
15.12.2016

Oppgave 1

a)
$$\vec{j}(\vec{r}) = -\varkappa \vec{\nabla} T$$
$$= j(r)\,\hat{e}_r$$

$\hat{e}_r$: Radiell enhetsvektor

$$j(r) = -\varkappa \frac{dT}{dr}$$
$$\dot{Q} = 4\pi r^2 j(r)$$
$$= \iint d\vec{A} \cdot \vec{j}$$

Her er A en flate som strømmen passerer igjennom. (en kuleflate med radius r).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

Stasjonære forhold: $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\iiint_V dV\, \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \oiint_{A(V)} d\vec{A} \cdot \vec{j} = 0$$

Det strømmer like mye energi inn i volumet V, som ut av det.

Velg så et volum V
begrenset av et kuleskall
med radius r og et kuleskall
med radius r+dr.

$$\oint\!\!\!\oint_S d\vec{S}\,\vec{j} = \dot{Q}(r) - \dot{Q}(r+dr) = 0$$

$\dot{Q}(r)$ strømmer inn i volumet
$\dot{Q}(r+dr)$ strømmer ut av volumet

$$\dot{Q}(r) = \dot{Q}(r+dr) \Rightarrow$$

$$\frac{d\dot{Q}}{dr} = 0$$

$$\underline{\underline{\dot{Q}(r) \text{ uavh. av } r}}$$

__b)__ Fourier's lov

$$\dot{Q} = 4\pi r^2 j(r)$$

$$= -4\pi r^2 \varkappa \frac{dT}{dr}$$

$$= -4\pi a r^2 T \frac{dT}{dr} \quad ; \varkappa = aT$$

$$T\,dT = -\frac{\dot{Q}}{4\pi a}\,\frac{dr}{r^2}$$

$$\int_{T(R_1)}^{T(r)} T\,dT = -\frac{\dot{Q}}{4\pi a}\int_{R_1}^{r}\frac{dr}{r^2}$$

$$\frac{1}{2}\left[T^2(r) - T_1^2\right] = \frac{\dot{Q}}{4\pi a}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right)$$

$\dot{Q}$ kan bestemmes fra grensebetingelsen $T(R_2) = T_2$

$$\frac{\dot{Q}}{4\pi a} = \frac{\frac{1}{2}\left(T_2^2 - T_1^2\right)}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)}$$

$$T(r) = \sqrt{T_1^2 \div \left(T_1^2 - T_2^2\right)\frac{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r}\right)}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}}$$

c)

$$\frac{\dot{Q}}{4\pi a} = \frac{1}{2} \frac{\left(T_2^2 - T_1^2\right)}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)}$$

$$T_1^2 = T_2^2 + \frac{\dot{Q}}{2\pi a}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

T_{1max} bestemt av kravet om at $\dot{Q}_{max} = 1000\ K$.

Innsetting av numeriske verdier:

$$\underline{T_1 = 201.5\ K}$$

Oppgave 2

a) $$TdS = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_y dT + \underbrace{\left[\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_T + X\right]}_{= \text{(fra formelark)}} dy$$

$$= \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_y dT + T\left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_y dy$$

$$= C_y\, dT + T\left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_y dy$$

b) $$X = \chi \left(\frac{y}{T}\right)^{\alpha}$$

$$T\left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_y = -\chi\,\alpha\left(\frac{y}{T}\right)^{\alpha}$$

$$TdS = C_y\, dT - \alpha\chi\left(\frac{y}{T}\right)^{\alpha} dy \qquad (*)$$

Adiabat: $TdS = 0$

$$0 = C_y\, T^{\alpha} dT - \chi\alpha\, y^{\alpha} dy$$

$$C_y\, T^{\alpha+1} - \chi\alpha\, y^{\alpha+1} = \text{konst.}$$

$A = C_y$

$B = \alpha\chi$

$\xi = \alpha + 1$

c)

$$T\,dS = C_y\,dT - \alpha \chi \left(\frac{y}{T}\right)^{\alpha} dy$$

1: Isoterm varmetilførsel ved T_h

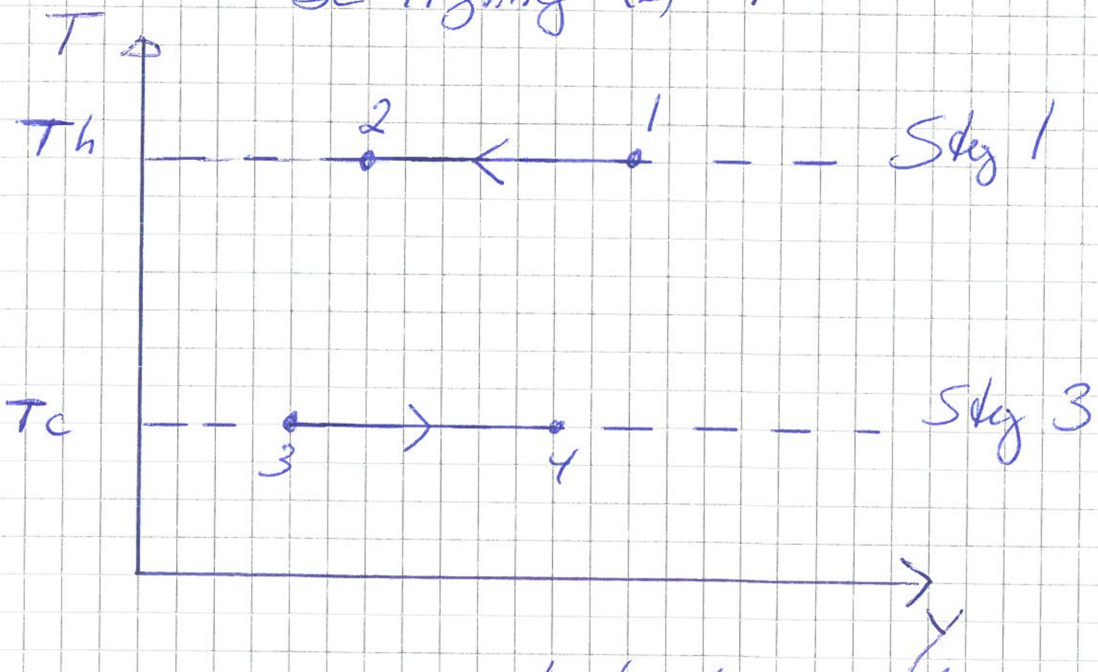
$dT = 0$; $T\,dS > 0 \Rightarrow dy < 0$

Se ligning (*)

3: Isoterm varme~~tilførsel~~ avgang ved T_c:

$dT = 0$; $T\,dS < 0 \Rightarrow dy > 0$

Se ligning (*)



2 og 3 må forbindes med en adiabat (Steg 2)

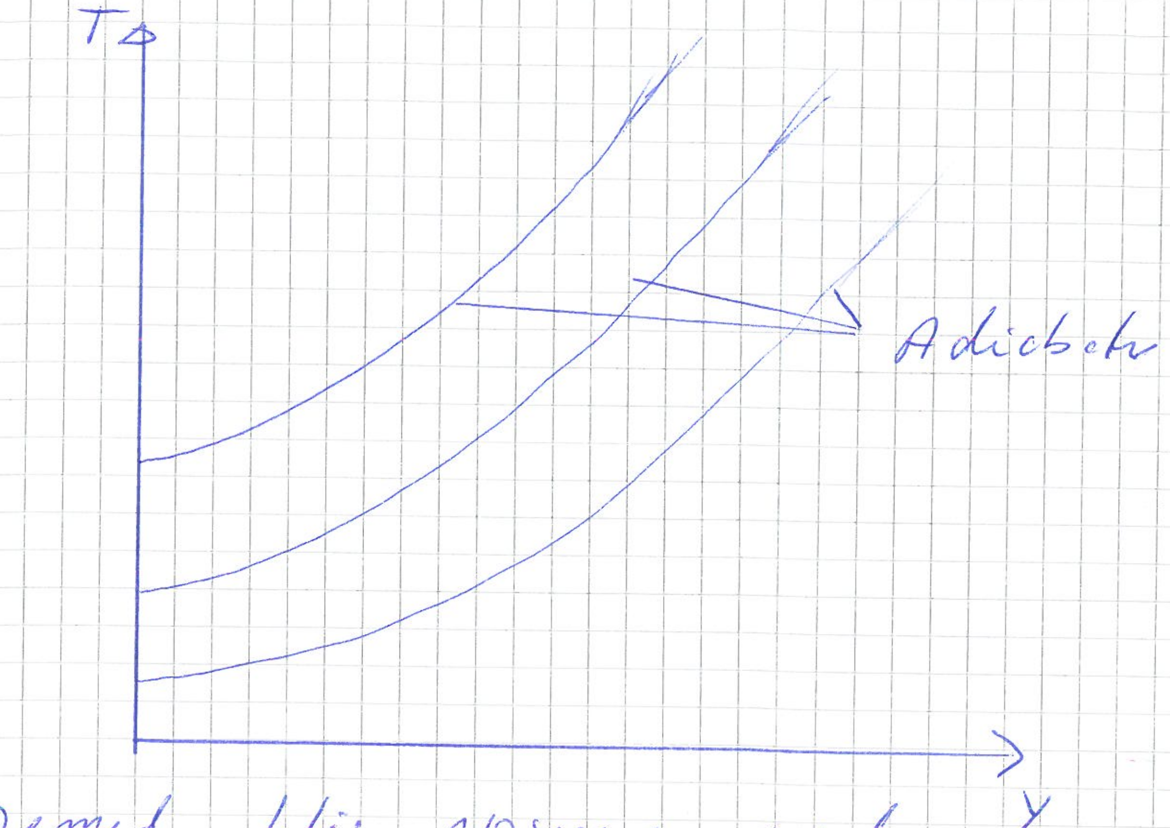
4 og 1 må forbindes med en adiabat (Steg 4)

Adiabat-ligning:

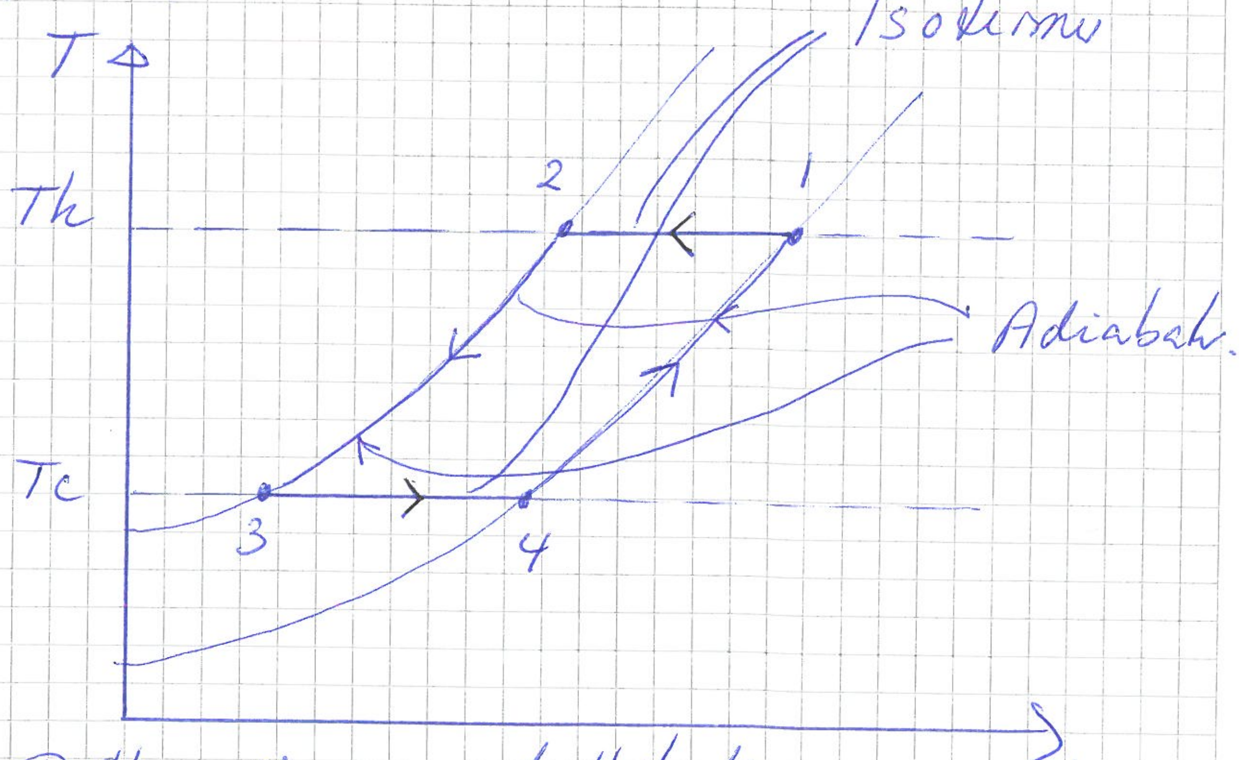
$$C_y\,T^{\alpha+1} - \alpha \chi\, y^{\alpha+1} = K$$

$$T = \left(\frac{K + \alpha \chi\, y^{\alpha+1}}{C_y}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}$$

Adiabatene ser da slik ut:



Dermed blir prosessen sende slik ut:



Dette er en fullstendig reversibel kretsprosess begrenset av to adiabater og to isotermer $\Rightarrow$ Carnot-prosess

d) Varme tilføres nå $4 \to 3$ (T_c)
Varme avgis $2 \to 1$ (T_h)

$$Q_t = \int_4^3 T\,dS \qquad (\text{isoterm})$$

$$= \int_4^3 T \left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_y dy$$

$$= -\chi\alpha \frac{T_c}{T_c^{\alpha+1}} \int_4^3 dy\, y^{\alpha}$$

$$= -\frac{\chi\alpha}{\alpha+1} \frac{1}{T_c^{\alpha}} \left(y_3^{\alpha+1} - y_4^{\alpha+1}\right)$$

$$= \frac{\chi\alpha}{\alpha+1} \frac{1}{T_c^{\alpha}} \left(y_4^{\alpha+1} - y_3^{\alpha+1}\right) > 0$$

$$Q_a = -\frac{\chi\alpha}{\alpha+1} \frac{1}{T_h^{\alpha}} \left(y_1^{\alpha+1} - y_2^{\alpha+1}\right) < 0$$

$$\eta = \left|\frac{Q_a}{W}\right| = \frac{Q_a}{Q_a + Q_t} = \frac{1}{\left|1 + \frac{Q_t}{Q_a}\right|}$$

$$\frac{Q_t}{Q_a} = -\left(\frac{T_h}{T_c}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{y_4^{\alpha+1} - y_3^{\alpha+1}}{y_1^{\alpha+1} - y_2^{\alpha+1}}\right)$$

Nå bruker vi den første adiabatligningen (pkt b) til å eliminere y-ene til fordel for T-ene

$$\text{x)}\quad C_y T_1^{\alpha+1} - \alpha X y_1^{\alpha+1} = C_y T_4^{\alpha+1} - \alpha X y_4^{\alpha+1}$$

$$\text{xx)}\quad C_y T_2^{\alpha+1} - \alpha X y_2^{\alpha+1} = C_y T_3^{\alpha+1} - \alpha X y_3^{\alpha+1}$$

$$T_1 = T_2 = T_h$$
$$T_3 = T_4 = T_c$$

$$\text{x)} - \text{xx)} : \quad y_2^{\alpha+1} - y_1^{\alpha+1} = y_3^{\alpha+1} - y_4^{\alpha+1}$$

$\Rightarrow$ $\cancel{\frac{Q_t}{Q_a}}$ ~~...~~ ih

$$\frac{Q_t}{Q_a} = -\left(\frac{T_h}{T_c}\right)^{\alpha} \left(\frac{y_4^{\alpha+1} - y_3^{\alpha+1}}{y_1^{\alpha+1} - y_2^{\alpha+1}}\right)$$

$$\underline{\eta_v = \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{T_h}{T_c}\right)^{\alpha}\right|}}$$

Kommentar: Dette er ikke hva en forventer basert på Carnot-prosessen. Det skyldes sammenhengen mellom $\underline{C_y \text{ og } X}$

Oppgave 3

a)

De to-atomige molekylene har følgende kvadratiske frihetsgrader.

i) Kinetisk energi av massesenter: 2

ii) Kinetisk og potensiell energi forbundet med vibrasjon langs forbindelses-aksen mellom atomene: 2

iii) Rotasjon om z-aksen: 1

Totalt 5 kvadratiske frihetsgrader.

Varmekapasitet pr. molekyl:

$$\underline{C = 5 \cdot \frac{k}{2}}$$

b)

$$Z = (Z_1)^N \quad \text{(oppgitt)}$$

$$Z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(n+1/2)}$$

$x \equiv \beta\hbar\omega$

$$Z_1 = e^{-\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{1-e^{-x}}$$

$$Z = \left(\frac{1}{2\sinh\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^N = e^{-\beta F}$$

$$\beta F = N \ln\left[2\sinh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)\right]$$

$$C = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = -k\beta^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \beta}\right)$$

Sammenheng mellom F og U

$$\left.\begin{array}{l} F = U - TS \\ S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \end{array}\right\} \Rightarrow U = F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$$

$$= F + \beta\left(\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)_V$$

$$= \frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta}$$

$$\Rightarrow U = N \frac{\partial}{\partial\beta} \ln\left(2\sinh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)\right)$$

$$= N\frac{\hbar\omega}{2}\coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)$$

$$C = -k\beta^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \beta}\right)$$

$$= Nk\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}$$

i) $\beta\hbar\omega \ll 1$

$$\frac{C}{N} \simeq k = \frac{k}{2} + \frac{k}{2}$$ (jfr. oppg. a)

ii) $\beta\hbar\omega \gg 1$

$$\sinh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

$$\simeq \frac{1}{2} e^{x}$$

$$\frac{C}{N} \simeq k\,(\beta\hbar\omega)^2 e^{-\beta\hbar\omega} \ll k$$

c) $kT \gg \hbar\omega \Rightarrow$

$$\frac{C}{N} \simeq \frac{5}{2} k$$

$T << T_0$: Bidraget fra vibrasjonene forsvinner $\Rightarrow$ et bidrag $\underline{k}$ forsvinner rundt $T = T_0$