Kont V2020

LF

TFY4165

Termisk Fysikk

1 a) En tilst. lign. beskriver sammenhengen mellom et systems (gass, magnet, sort hull, etc) tilstandsvariable (P, V, T, M, H, ..) når systemet er i likevekt med sine omgivelser.

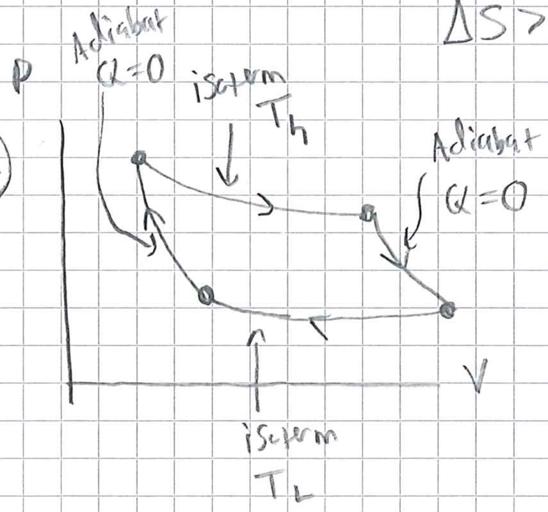
En prosess er reversibel dersom alle tilstandene i mellom start og slutt er likevektstilstander. DVS tilstandslignigen er oppfylt på alle punkter i prosessen. I tillegg krever en rev. prosess at både system og omgivelser kan vende tilbake til sine starttilstander. I praksis betyr dette som oftest at man neglisjerer friksjon.

b) i) Et systems entropi er et mål på antall mulige mikrotilstander. Den eksakte relasjonen er $S = k_B \ln W$.

ii) 2. lov sier at i et termisk isolert system så er $\Delta S \geq 0$. $\Delta S = 0 \iff$ reversibel prosess

$\Delta S > 0 \iff$ irreversibel prosess

c) i)



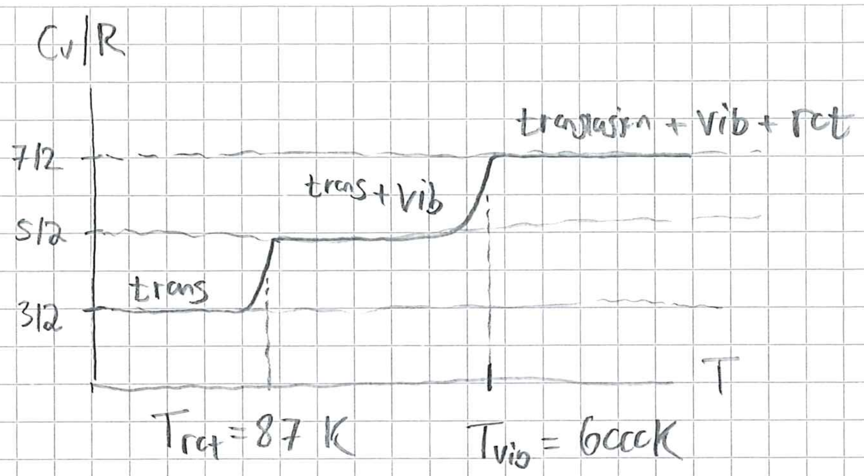
2 isotermer
2 adiabater

Virkningsgrad $\eta_c = 1 - \frac{T_L}{T_h}$.

ii) Carnots teorem sier at det ikke finnes en mer effektiv varmekraftmaskin enn Carnotmaskinen. DVS at en vilkårlig maskin med virkningsgrad η alltid vil være begrenset av $\eta_c = 1 - \frac{T_1}{T_2}$. Her er T_1 = laveste temperatur i prosessen

T_2 = høyeste temperatur i prosessen.

d) i)



Klassisk resultat er korrekt hvis $T > T_{vib}$.

ii) Kvantemekanikk leder til at spesifikke frihetsgrader blir "fresset" ut ved spesielle temperaturer

$T > T_{vib}$: translasjon + vibrasjon + rotasjon

3 + 2 + 2

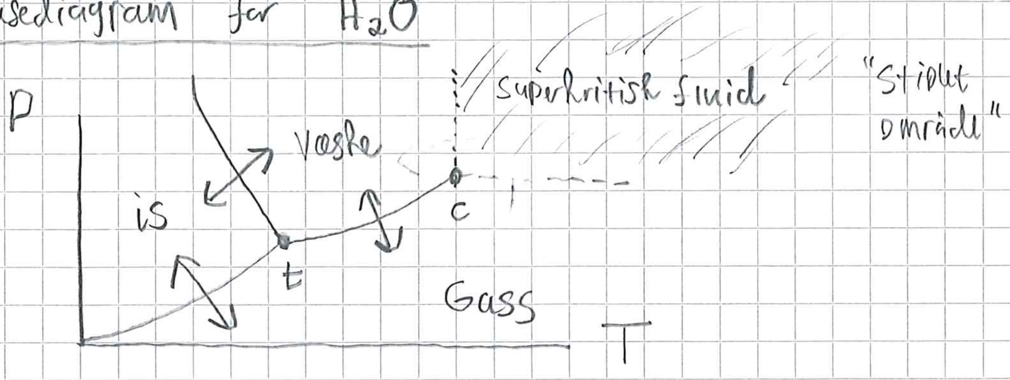
$T_{vib} > T > T_{rot}$: 3 + $\cancel{2}$ + 2

$T_{rot} > T$: 3 + $\cancel{2}$ + $\cancel{2}$

Utfrysningen skjer fordi at energien er kvantisert. Dvs at det er et energigap mellom grunntilstanden og de eksiterte tilstandene. Hvis den termiske energien kT er (mye) mindre enn et energigap vil den aktuelle frihetsgraden ikke aktiveres.

e) i) Prosessen hvor et system i en fase (F.eks væske/metall) går over til en annen fase (F.eks gass/superleder).

Fasediagram for H_2O

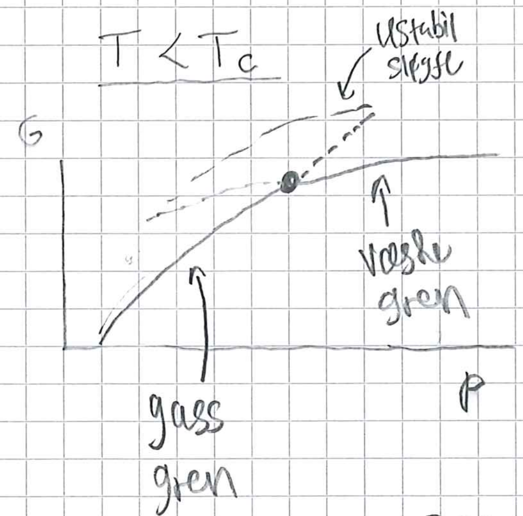


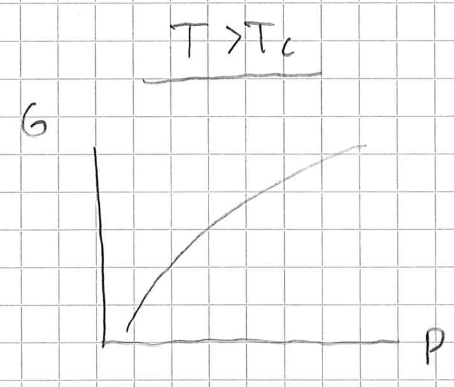
$\longleftrightarrow$: viser faseovergangar

t: trippelpunkt hvor is, væske, og gass kan koeksistere.

c: Kritisk punkt hvor det ikke er forskjell på væske og gass. Det er ingen faseovergang i det "stiplede området".

ii)





Volum definert via $V = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T$ så volumet endres diskontinuerlig i punktet •. Dette tolkes som en faseovergang (1. orden)

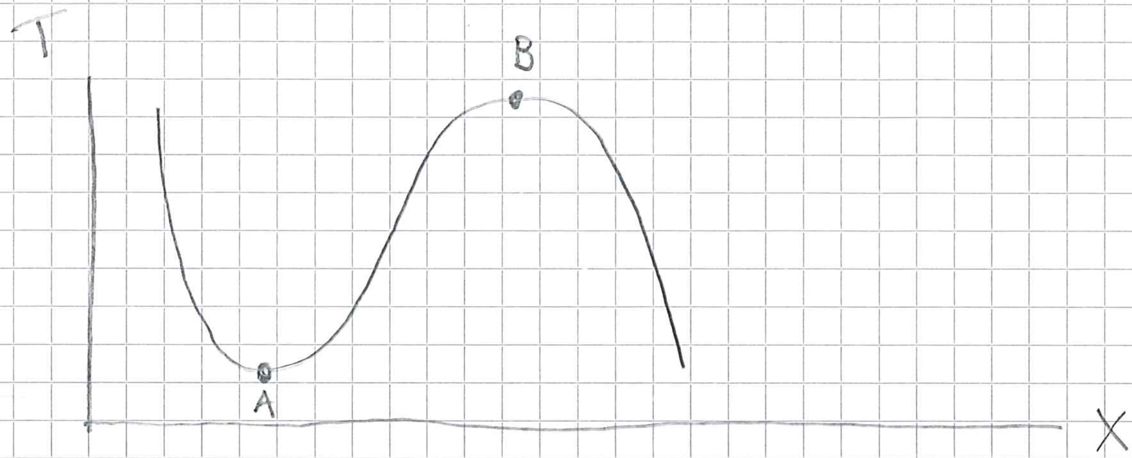
Glatt kurve uten knekkpunkt. Det gir ingen diskontinuerlig endring i volum. Dvs ingen faseovergang.

f) Varmeligningen er $\partial_t T - D_T \nabla^2 T = 0$.

Det er en kombinasjon av Fouriers lov og kontinuitetslign. (energibevarelse)

Den beskriver at varme er bevart og at varme overføres fra områder med høy temp. til områder med lav temp.

Eks:

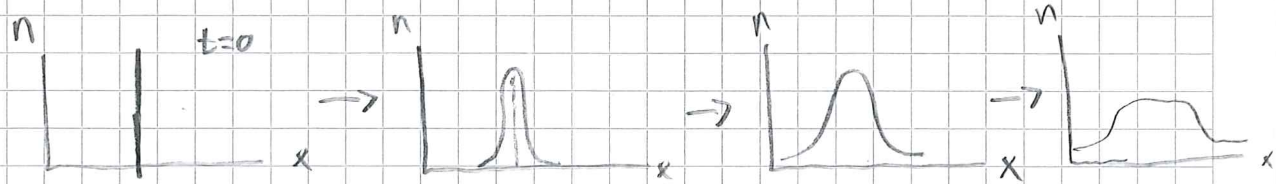


A: områdene rundt punkt A har høyere temperatur enn A. DVS varme vil strømme inn i punkt A. ($\partial_t T > 0$)

B: områdene rundt punkt B har lavere temp. enn B. DVS varme vil strømme fra punkt B til område rundt punkt B ($\partial_t T < 0$)

g) i) Diffusjon er transport av masse pga konsentrasjonsgradient.

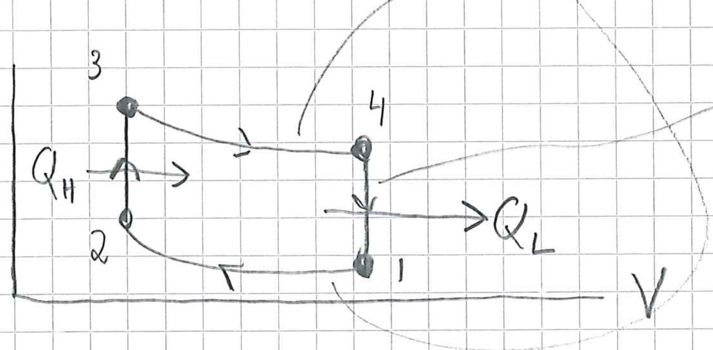
ii)



Arealet må være konstant fordi N er bevart.

2 Otto syklus

a) i)



ii) Ideell gass $\Rightarrow$ $PV = nRT$

Adiabat $\Rightarrow$ PV^γ = konstant

$$W_{3\to4} = \int_{V_3}^{V_4} P\,dV = \int_{V_3}^{V_4} \underbrace{(P_3 V_3^\gamma)}_{=P_4V_4^\gamma} V^{-\gamma}\,dV$$

$$= P_3V_3^\gamma \left[\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right]_{V_3}^{V_4} = \frac{P_3V_3^\gamma}{1-\gamma}\left[V_4^{1-\gamma} - V_3^{1-\gamma}\right]$$

$$= \frac{1}{1-\gamma}\left[P_4V_4 - P_3V_3\right] = \frac{1}{1-\gamma}\left[nRT_4 - nRT_3\right]$$

$$= \frac{nR}{1-\gamma}\left[T_4 - T_3\right]$$

$\Delta S = 0$ (S er tilst. funksjon)

b) $\eta = \frac{\text{nytte}}{\text{kostnad}} = \frac{\text{arbeid}}{\text{mottatt varme}} = \frac{Q_H + Q_L}{Q_H} = 1 + \frac{Q_L}{\underbrace{Q_H}_{?}}$

$$Q_H = Q_{2\to3} = \Delta U_{2\to3} = C_V(T_3 - T_2)$$

$$Q_L = C_V(T_1 - T_4)$$

$$\Rightarrow \eta = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

Kan forenkle ved å benytte oss av adiabatligningene:

$$T_4 V_1^{\gamma-1} = T_3 V_2^{\gamma-1} \ ; \ T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

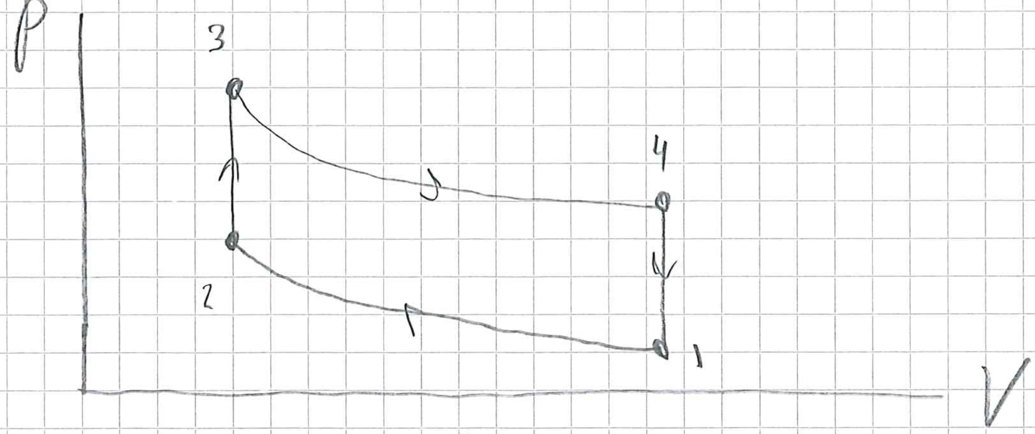
$$\Rightarrow (T_4 - T_1) V_1^{\gamma-1} = (T_3 - T_2) V_2^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$$

La $r = V_1 / V_2 > 1$

$$\Rightarrow \eta = 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma-1} = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}$$

c)

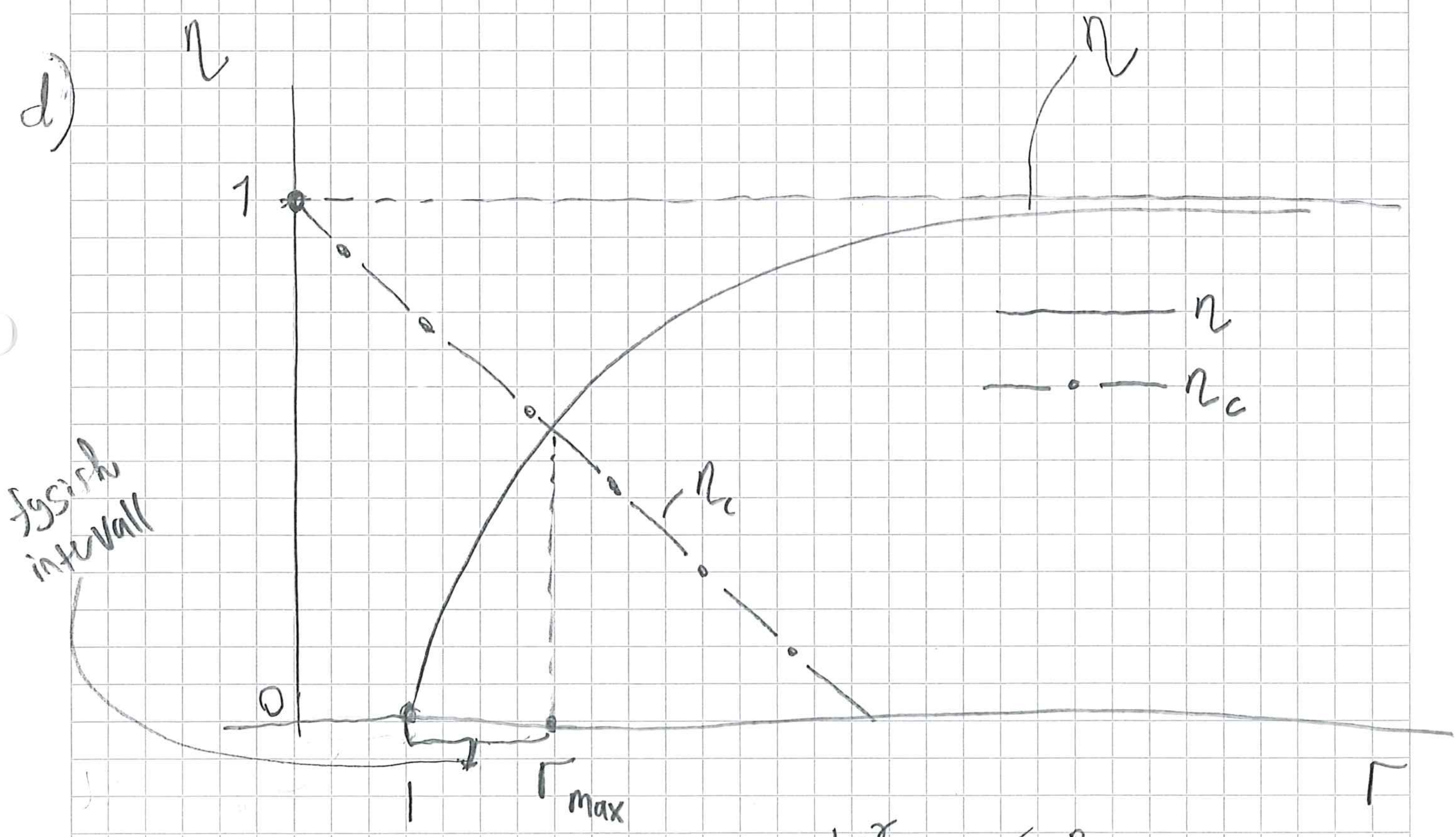


Carnot : $\eta_c = 1 - \frac{T_{lavest}}{T_{høyest}} = 1 - \frac{T_1}{T_3}$

$$\frac{nRT_1}{nRT_3} = \frac{P_1V_1}{P_3V_3} = \frac{P_1}{P_3}\frac{V_1}{V_2} = \frac{P_1}{P_3}\cdot r$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\eta_c = 1 - \left(\frac{P_1}{P_3}\right)\cdot r}}$$

d)



r_{max} tilfredstiller : $\eta \le \eta_c \Rightarrow \cancel{1} - r^{1-\gamma} \le \cancel{1} - \frac{P_1}{P_3} r$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{r}}{r^{\gamma}} \ge \frac{P_1}{P_3}\cancel{r} \Rightarrow r \le \left(\frac{P_3}{P_1}\right)^{1/\gamma} \Rightarrow \underline{\underline{r_{max} = \left(\frac{P_3}{P_1}\right)^{1/\gamma}}}$$

3

$$S = kN\left[\ln\left\{\frac{V}{N}\left(\frac{4\pi m U}{3Nh^2}\right)^{3/2}\right\} + \frac{5}{2}\right]$$

a)

i) $$e^{\frac{S}{kN} - \frac{5}{2}} = \frac{V}{N}\left(\frac{4\pi mU}{3Nh^2}\right)^{3/2}$$

$$\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}} e^{\frac{2S}{3kN} - \frac{5}{3}} \cdot \frac{3Nh^2}{4\pi m} = U$$

Naturlige variable S, V, N

$$T\,dS = dU + p\,dV - \mu\,dN$$

$$\Rightarrow T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N} = \underline{\underline{U \cdot \frac{2}{3kN}}} \Rightarrow U = \frac{3NkT}{2}$$

ii) $$\Rightarrow p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,N} = + \cdot \frac{3Nh^2}{4\pi m} \cdot e^{\frac{2S}{3kN} - \frac{5}{3}} \cdot \frac{N^{2/3}}{V^{5/3}} \frac{2}{3}$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{3V} \cdot U}} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}V} \cdot \frac{\cancel{3}NkT}{\cancel{2}} = \underline{\underline{\frac{NkT}{V}}}$$ Ideell gass

$$\Rightarrow \mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V} = \frac{\partial}{\partial N}\left[\frac{3h^2}{4\pi m} \frac{N^{5/3}}{V^{2/3}} e^{\frac{2S}{3kN} - \frac{5}{3}}\right]$$

$$= \underbrace{\frac{3h^2}{4\pi m} \cdot \frac{5}{3} \frac{N^{2/3}}{V^{2/3}} e^{\frac{2S}{3kN} - \frac{5}{3}}}_{\frac{5}{3}\frac{U}{N}} + \underbrace{\frac{3h^2}{4\pi m} \frac{N^{5/3}}{V^{2/3}} e^{\frac{2S}{3kN} - \frac{5}{3}}}_{U} \cdot -\frac{2S}{3kN^2}$$

$$= \underline{\frac{U}{N}\left(\frac{5}{3} - \frac{2S}{3Nk}\right)}$$

b) $F = U - TS$ Naturlige Variable T, V, N

$$U = \frac{3}{2} N k_B T$$

$$S = Nk \left[\ln \left\{ \frac{V}{N} \left(\frac{4\pi m U}{3 N h^2} \right)^{3/2} \right\} + \frac{5}{2} \right]$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F}} = \frac{3}{2} N k_B T - N k_B T \left[\cdots \right] \qquad \frac{3}{2} NkT$$

$$= -N k_B T \left[\ln \left\{ \frac{V}{N} \left(\frac{4\pi m U}{3 N h^2} \right)^{3/2} \right\} + 1 \right]$$

$$= -N k_B T \left[\ln \left\{ \frac{V}{N} \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \right\} + 1 \right]$$

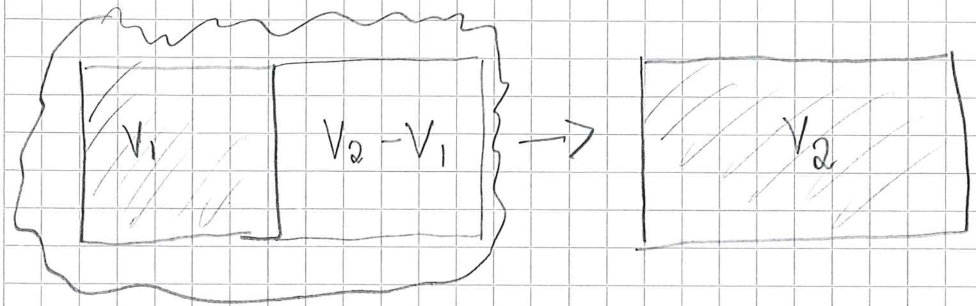
$$dF = -p\,dV - S\,dT + \mu\,dN$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S}} = -\left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{N,V} = -\frac{F}{T} + N k_B T \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{3}{2} \ln T + \cdots \right]$$

$$= -\frac{F}{T} + \frac{3}{2} Nk$$

$$= N k_B \left[\ln \left\{ \frac{V}{N} \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \right\} + \frac{5}{2} \right]$$

c) Før ① etter ②



Fri ekspansjon

Her er det ikke noe arbeid eller varmeutveksling så $dU = 0$

$\Rightarrow \quad U_1 = U_2 \equiv E$

Har at $$S = Nk\left[\ln\left\{\frac{V}{N}\left(\frac{4\pi m U}{3Nh^2}\right)^{3/2}\right\} + \frac{5}{2}\right]$$

$$S_2 = Nk\left[\ln\left\{\frac{V_2}{N}\left(\frac{4\pi m E}{3Nh^2}\right)^{3/2}\right\} + \frac{5}{2}\right]$$

$$S_1 = Nk\left[\ln\left\{\frac{V_1}{N}\left(\frac{4\pi m E}{3Nh^2}\right)^{3/2}\right\} + \frac{5}{2}\right]$$

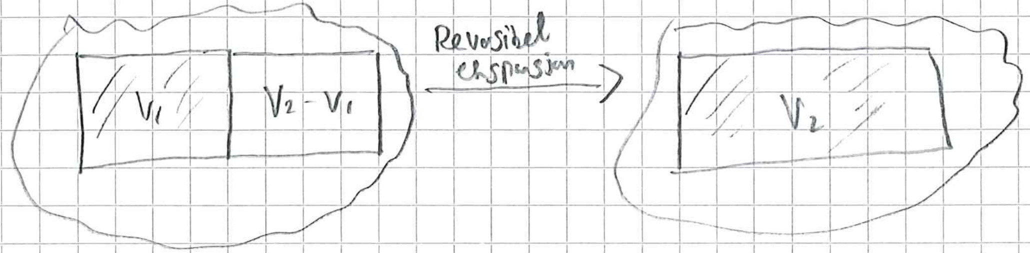
$$\underline{\underline{S_2 - S_1}} = Nk\left[\ln\frac{V_2}{N} - \ln\frac{V_1}{N}\right] = \underline{\underline{Nk\ln\frac{V_2}{V_1}}}$$

Fra a)

$$T = \frac{2U}{3Nk} \Rightarrow \underline{\underline{T_1 = T_2 = \frac{2E}{3Nk}}}$$

$$pV = Nk_BT \Rightarrow P_2 = \frac{Nk_BT_2}{V_2} = \frac{Nk_BT_1}{V_2} = \frac{P_1V_1}{V_2} = \underline{\underline{P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}}$$

d) Før (1) Etter (2)



Reversibel + adiabatisk ekspansjon $\Rightarrow$ 2. lov $\Rightarrow$ $\Delta S = 0.$

$$\underline{\underline{S_2 = S_1}} \Rightarrow V_1 U_1^{3/2} = V_2 U_2^{3/2}$$

$$\Rightarrow U_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3} U_1$$

Fra a) $U = \frac{3}{2} NkT \Rightarrow \cancel{\frac{3}{2}} \cancel{Nk} T_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3} \cdot \cancel{\frac{3}{2}} \cancel{Nk} T_1$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3} T_1}}$$

$$P_2 V_2 = NkT_2 = Nk\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3} T_1 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3} P_1 V_1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{5/3} P_1}}$$

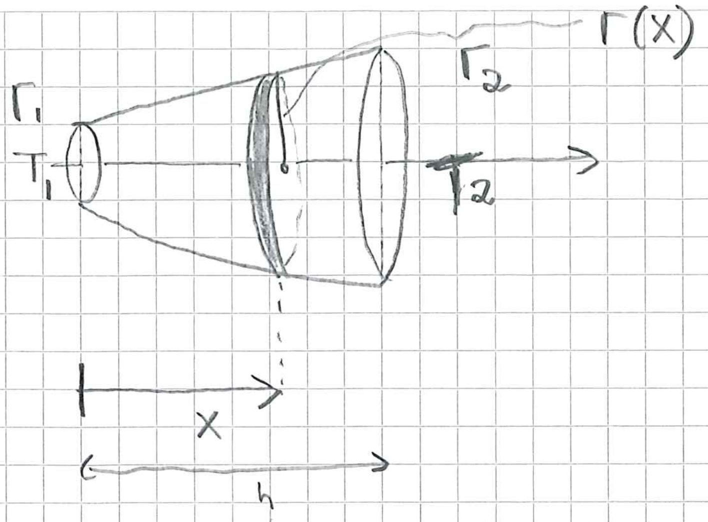
Arbeid $dW = -dU \Rightarrow W = U_1 - U_2$

$$\underline{\underline{W}} = U_1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3} U_1 = U_1\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3}\right]$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{2} N k_B T_1 \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3}\right]}}$$

4

a)



Radius til infinitesimal sylinder i avstand x fra bunn er

$$r(x) = r_1 + \frac{r_2 - r_1}{h} x \quad \text{(Lign. for rett linje)}$$

Varmestrømmen $\underline{\underline{\dot{Q}}} = J \cdot A(x)$ må være $\underline{\text{konstant}}$ pga energibevarelse.

J: varmestrøm-tetthet

$A(x)$: areal som varme strømmer igjennom

$$\text{DVS} \quad \dot{Q} = J \cdot A(x) = \underbrace{-\kappa \frac{dT}{dx}}_{J \text{ kun avhengig av } x} \cdot \pi r^2(x)$$

separabel diff. lign.

$$\Rightarrow -\frac{\dot{Q}}{\kappa \pi} \int_0^h \left[r_1 + \frac{r_2 - r_1}{h} x \right]^{-2} dx = \int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{Q}}{\kappa \pi} \cdot \frac{h}{r_2 - r_1} \left[\frac{1}{r_1 + \frac{r_2 - r_1}{h} x} \right]_0^h = T_2 - T_1$$

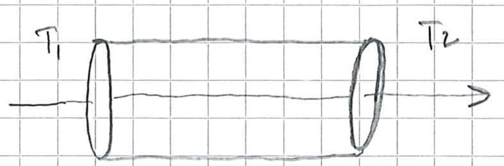
$$\frac{\dot{Q} h}{\kappa \pi (r_2 - r_1)} \left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right] = T_2 - T_1$$

$$-\frac{\dot{Q} h}{\kappa \pi} \left[\frac{\cancel{r_1 - r_2}}{r_1 r_2} \right] \frac{1}{\cancel{r_1 - r_2}} = T_2 - T_1$$

$$\Rightarrow \dot{Q} = \frac{r_1 r_2}{h} \kappa \pi (T_1 - T_2)$$

$$[\dot{Q}] = \frac{m^2}{m} \cdot \frac{J}{smK} \cdot K = \underline{\underline{J/s}}$$

b) $r_1 = r_2 = \rho^{= \text{konstant}} \Rightarrow$ Sylinder



$$\dot{Q} = J \cdot \pi \rho^2 = -\kappa \frac{dT}{dx} \pi \rho^2$$

$$-\frac{\dot{Q}}{\kappa \pi \rho^2} \int_0^h dx = \int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$-\frac{\dot{Q}}{\kappa \pi \rho^2} h = T_2 - T_1 \Rightarrow \underline{\underline{\dot{Q} = \frac{\kappa \pi \rho^2}{h} (T_1 - T_2)}}$$ Stemmer med a)

<u>Temperaturprofil:</u>

$$-\frac{\dot{Q}}{\kappa \pi \rho^2} \int_0^x dx = \int_{T_1}^{T(x)} dT \Rightarrow -\frac{\dot{Q}}{\kappa \pi \rho^2} x = T(x) - T_1$$

$$\Rightarrow T(x) = T_1 - \frac{\dot{Q}}{\kappa \pi \rho^2} x$$

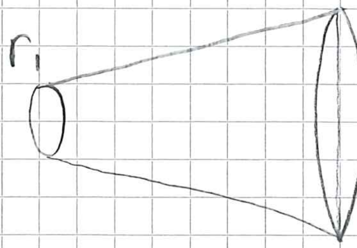
$$\Rightarrow \underline{\underline{T(x)}} = T_1 - x \cdot \frac{1}{\cancel{\kappa \pi \rho^2}} \cdot \frac{\cancel{\kappa \pi \rho^2}}{h} (T_1 - T_2)$$

$$= \underline{\underline{T_1 - (T_1 - T_2) \frac{x}{h}}}$$

Samme som mellom 2 uendelige plan (1-dimensjon)

c) Ikke stasjonært problem

i) $T_1(t)$



$T_2 =$ konstant

På ethvert tidspunkt må vi ha

$$\dot{Q}(t) = \frac{r_1 r_2}{h} \kappa \pi \left(T_1(t) - T_2 \right)$$

og $\quad C = \frac{dQ}{dT_1} \Rightarrow dQ/dt = C \, dT/dt$

$$\Rightarrow \underbrace{\dot{Q}(t) = -C \frac{dT_1}{dt}}_{} \qquad (C > 0)$$

T_1 må synke med tida t, og $\dot{Q}$ skal være positiv.

Dette gir Newtons avkjølingslov med kjeglegeometri:

$$\boxed{\frac{r_1 r_2}{h} \kappa \pi \left(T_1(t) - T_2 \right) = -C \frac{dT_1}{dt}}$$

ii)

$$\Rightarrow -\frac{r_1 r_2 \kappa \pi}{h} \frac{1}{C} \int_0^t dt = \int_{T_1(0)}^{T_1(t)} \frac{dT_1}{T_1 - T_2}$$

$$-\frac{r_1 r_2 \kappa \pi}{h} \frac{1}{C} t = \Big[\ln (T_1 - T_2) \Big]_{T_1(0)}^{T_1(t)}$$

$$-\frac{r_1 r_2 \kappa \pi}{h C} t = \ln \frac{T_1(t) - T_2}{T_1(0) - T_2}$$

$$\Rightarrow \frac{T_1(t) - T_2}{T_1(0) - T_2} = e^{-\frac{r_1 r_2 \kappa \pi}{hc} t}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T_1(t) = T_2 + \left[T_1(0) - T_2\right] e^{-\frac{r_1 r_2 \kappa \pi}{hc} t}}}$$

iii) relaksjonstid $\underline{\underline{t_0 = \frac{hc}{r_1 r_2 \kappa \pi}}}$

$$[t_0] = \frac{m \cdot \frac{J}{K}}{m^2 \cdot \frac{J}{smK}} = \frac{\cancel{m}\cancel{J}}{\cancel{K}} \cdot \frac{s\cancel{m}\cancel{K}}{\cancel{m^2}\cancel{J}} = \underline{\underline{s}}$$

Når $\kappa = 0$ er det ingen varmestrøm så $T_1(t) = T_1 = \text{konstant}$

Når $\kappa \rightarrow \infty$ er varmestrømmen veldig stor slik at temperatur utjevningen skjer umiddelbart. DVS $T_1(t) \rightarrow T_2 = \text{konstant}$ for alle t.