

Løsningsforslag, eksamen TFY4165 19 desember 2023

1) Ideell gass av to-atomige molekyler (under stp): $c_{mp} = c_{mV} + R = \frac{7}{2}R \simeq 29.1 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$.

2) Endeling hulldiameter ved romtemperatur blir $d_h = d_b(T_0)(1 + \alpha_L(\text{stål})\Delta T)(1 - \alpha_L(\text{Al})\Delta T) = 6.5603 \text{ cm}$.

3) Formelsamling gir α_V og κ_T , og med $x = p$, $y = V$ og $z = T$ gir den sykliske regel

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = -\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{\alpha_V}{\kappa_T} \Rightarrow \Delta p = \frac{\alpha_V}{\kappa_T} \Delta T = 5.69 \cdot 10^6 \text{ Pa} \simeq 56 \text{ atm}.$$

4) Har $C_p = n c_{mp} = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p$

$$\Rightarrow \Delta Q = n \int_{T_l}^{T_h} c_{mp}(T) dT = n(a\Delta T + b(T_h + T_l)\Delta T + \frac{c\Delta T}{T_h T_l}) = n \langle c_{mp} \rangle \Delta T,$$

som gir midlere molar varmekapasitet for temperaturintervallet

$$\langle c_{mp} \rangle = \frac{\Delta Q}{n\Delta T} = a + b(T_h + T_l) + \frac{c}{T_l T_h} \simeq 26.7 \text{ J}/(\text{mol K}).$$

5)

$$W = \int_{V_0}^{2V_0} p dV = \int_{V_0}^{2V_0} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln(2) \simeq 17.3 \text{ kJ}.$$

6) Adiabatkonstant (enatomær ideell gass) $\gamma = C_p/C_V = \frac{5}{3}$. Slutttemperaturen blir

$$T_i V_i^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1} \Rightarrow T_f = T_i \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma-1} = 243 \text{ K}.$$

7) Ideell gass, så U avhenger bare av T . Første hovedsetning

$$dQ = dU + dW \Rightarrow dQ = dW = p\Delta V \simeq -2.3 \text{ kJ}.$$

8) a) $p_B = nRT_B/V_B = nRT_A/(2V_A) = p_A/2 = 2.5 \text{ atm}$.

b) $T_C = \left(\frac{p_C}{p_B}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_B = 461 \text{ K}$.

c) $W_{tot} = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = W_1 + W_2 + W_3$ hvor

$$W_1 = nRT_A \ln(V_B/V_A) = 6912 \text{ J}, W_2 = -\Delta U = n\frac{5}{2}R(T_B - T_C) = 5742 \text{ J}.$$

For å regne ut W_3 trenger vi volumet i C, $V_C = (p_B/p_C)^{1/\gamma} V_B = (5/2)^{1/\gamma} V_B$, som gir

$$W_3 = p_C(V_D - V_C) = \frac{2p_A V_A}{5} \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^{1/\gamma}\right) = \frac{2}{5} nRT_A \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^{1/\gamma}\right) = -5681 \text{ J}.$$

Dermed får vi

$$W_{tot} = 6974 \text{ J.}$$

d) For virkningsgraden trenger vi tilført varme. Har $Q_1 = W_1 = 6912 \text{ J}$, $Q_2 = 0$, $Q_3 < 0$ og $Q_4 = \Delta U = \frac{5}{2}nR(T_A - T_D) = 2nRT_A = 19944 \text{ J}$, som gir

$$\eta = W/Q_{inn} \simeq 0.26.$$

9) Varme overført fra høytemperaturreservoaret gitt ved $\eta = W/Q_h \Rightarrow Q_h = W/\eta$, og spillvarmen som overføres til lavtemperaturreservoaret er gitt ved energibevaring $Q_l = Q_h - W = (1/\eta - 1)W$. Entropiendringen til reservoarene blir

$$\Delta S = \Delta S_h + \Delta S_l = -\frac{Q_h}{T_h} + \frac{Q_l}{T_l} = \frac{W}{T_l} \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) - \frac{W}{\eta T_h} = 5.62 \cdot 10^4 \text{ J/K.}$$

10) Temperaturen er en intensiv makroskopisk størrelse som bare avhenger av gjennomsnittlig kinetisk energi i systemet, mens det på det mikroskopiske plan foreligger en fordeling av molekyllhastigheter/kinetiske energitilstander. Under kondensasjon vil gassmolekylene med lavest kinetisk energi ha størst sannsynlighet for å gå over i væskefasen, og som et resultat øker temperaturen i den gjenværende gassen.

11) Termodynamisk likvekt innebærer termisk ($T_\alpha = T_\beta$), mekanisk ($p_\alpha = p_\beta$) og kjemisk ($\mu_\alpha = \mu_\beta$) likevekt.

12) Kjemisk potensial er definert for enhver komponent i av systemet ved $\mu_i = \left(\frac{\partial G}{\partial N_i} \right)_{T,p,N_{j \neq i}}$. μ_i svarer altså til Gibbs fri energi per partikkel av type i (med alle andre variable er holdt konstant), og er dermed en intensiv størrelse.

13) $G = U + pV - TS \Rightarrow dG = TdS - pdV + pdV - Vdp - TdS - SdT = Vdp - SdT$, som gir $S = - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p$.

Fra de lineære modellene finnes entropiendring pr atom ved s-l likvekt

$$\Delta S_{sm} = - \left[\left(\frac{\partial G_l}{\partial T} \right)_p - \left(\frac{\partial G_s}{\partial T} \right)_p \right] = (3.1 \cdot 10^{-4} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}) \text{ J/(atom K)} = 4.96 \cdot 10^{-23} \text{ J/(atom K)}.$$

Dermed blir molar smeltevarme $l_{sm} = N_A \Delta S_{sm} T_m = 5.03 \cdot 10^4 \text{ J/mol}$.

(Si har samme krystallstruktur som diamant, derav betegnelsen i oppgavefiguren).

14) Karakteristiske hastigheter gitt ved Maxwell-Boltzmann fordelingen ($f(v)$ i formelsaml.) som tar utgangspunkt i $\langle E_K \rangle = \frac{1}{2}m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}k_bT \Rightarrow \langle v_{rms} \rangle = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3} \sqrt{k_B T/m}$. Andre karakteristiske hastigheter $\propto \sqrt{k_B T/m}$, med andre proporsjonalitetskonstanter, som er uvesentlig for sammenligning av hastigheter av samme type. Får $\langle v_s \rangle_{Ar} / \langle v_s \rangle_{Xe} = \sqrt{m_{Xe}/m_{Ar}} \simeq 1.81$

15) Leddet EdP tilsværer det ordinære pdV -leddet, og skyldes elektrisk arbeid på omgivelsene ved at materialet polariseres i E-feltet. Gibbs fri energi for dette systemet

$$G = U + PE - TS \Rightarrow dG = dU + PdE + EdP - TdS - SdT = PdE - SdT,$$

som gir

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_E &= -S \text{ og } \left(\frac{\partial G}{\partial E}\right)_T = P \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_E &= \frac{\partial^2 G}{\partial T \partial E} = -\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_T. \end{aligned}$$

16) a) Stat.mek på gittertilstandene gir partisjonsfunksjon $Z = \exp(-\beta E_1) + \exp(-\beta E_2) = \exp(\beta \varepsilon) + 1$, og gjennomsnittlig tilstandsenergi

$$\langle E \rangle = \sum_{i=1}^2 E_i P_i = \frac{E_1 \exp(-\beta E_1)}{Z} + \frac{E_2 \exp(-\beta E_2)}{Z} = \frac{-\varepsilon \exp(\beta \varepsilon)}{1 + \exp(\beta \varepsilon)}.$$

Med $T = 1.25\varepsilon/k_B \Rightarrow \beta = (1.25\varepsilon)^{-1} \Rightarrow \langle E \rangle_{T=1.25\varepsilon/k_B} = -\varepsilon \cdot \exp(0.8)/(1 + \exp(0.8)) \simeq -0.69\varepsilon$.

b) Fra formelsamling $Z = \exp(-\beta F) \Rightarrow F = -k_B T \ln Z$. Fra $F = U - TS$, finnes $dF = pdV - SdT$ som gir

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = k_B \ln Z + k_B T \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = k_B \ln Z + \frac{k_B T}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial T}.$$

Innfører $Z = \frac{Z_1^N}{N!} \Rightarrow \ln(Z) = N \ln(Z_1) - \ln(N!) \simeq N \ln(Z_1) - N \ln(N) + N$, der vi har antatt N stor og brukt Sterlings formel. Dette gir

$$\begin{aligned} S &= k_B N \ln(1 + \exp(\beta \varepsilon)) - N \ln(N) + N - N \frac{\varepsilon}{T} \frac{\exp(\beta \varepsilon)}{1 + \exp(\beta \varepsilon)} \\ &= N k_B \left(\ln(1 + \exp(\beta \varepsilon)) - \ln(N) + 1 - \frac{\varepsilon}{k_B T} \frac{1}{1 + \exp(-\beta \varepsilon)} \right). \end{aligned}$$

Med β skrevet ut eksplisitt

$$S = N k_B \left[\ln(1 + \exp(\varepsilon/k_B T)) - \ln(N) + 1 - \frac{\varepsilon}{k_B T} \frac{1}{1 + \exp(-\varepsilon/k_B T)} \right].$$

17) Reaksjonen går spontant om $\Delta G = \Delta H - T \Delta S < 0$, som gir $T > \frac{\Delta H}{\Delta S} = 381.92 \text{ K}$.

18) TDI (med strekkearbeid $p \hat{a}$ strikken):

$$T dS = C_L dT - f dL \Rightarrow dS = C_L \frac{dT}{T} - \gamma L dL \Rightarrow \Delta S = C_L \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) - \frac{\gamma}{2} (L^2 - L_0^2).$$

19) 1 mol van der Waals gass (formelsamling): $p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \Rightarrow dp = \frac{R}{V-b} dT - \frac{RT}{(V-b)^2} dV + \frac{2a}{V^3} dV$, som gir

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3} = -\left[\frac{RTV^3 - 2a(V-b)^2}{V^3(V-b)^2}\right].$$

Den isoterme kompressibiliteten gitt ved (formelsamling)

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{1}{V} \frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T} = \frac{V^2(V-b)^2}{RTV^3 - 2a(V-b)^2}.$$

20) Formelsamling gir kokepunktforhøyelse $\Delta T = \frac{RT_0^2 x_s}{l_f}$ hvor alle størrelser er gitt unntatt $l_f = 2257 \text{ kJ/kg} \cdot 0.018 \text{ kg/mol} = 40.6 \text{ kJ/mol}$, som gir $\Delta T = 0.581$, og kokepunkt for sjøvann $T \simeq 100.6^\circ\text{C}$.

21) Wiens forskyvningslov (formelsamling) gir $T = k_1/\lambda_{maxI} = k_1 E/hc = \frac{2.898 \cdot 10^{-3} \cdot 25 \cdot 10^3 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{6.63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} \text{ K} = 5.8 \cdot 10^7 \text{ K}$.

22) Strålingen fra satelitten, med konstant emissivitet $\varepsilon = \frac{3}{4}$ gir varmetap

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{CdT}{dt} = -j(4\pi(d/2)^2) = -\pi d^2 \varepsilon \sigma T^4 \Rightarrow \frac{dT}{dt} = -\frac{3\pi d^2 \sigma}{4C} T^4.$$

23) a) Varmestrøm

$$\frac{dQ}{dt} = jA = A\kappa \frac{\Delta T}{b} = 3.2 \text{ W}.$$

b) Varmestrøm for hver av blokkene $\frac{dQ_i}{dt} = T_i \frac{dS_i}{dt}$ og $\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ_1}{dt} = -\frac{dQ_2}{dt}$ gir entropistrøm

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(S_1 + S_2) = \frac{dQ}{dt} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = \frac{A\kappa (\Delta T)^2}{b T_1 T_2} = 2.67 \text{ W/K}$$

c) Med konstant volum gir første hovedsetning $\frac{dQ}{dT} = \frac{dU}{dT} = C$, som innsatt i uttrykket gitt i oppgaven gir

$$\begin{aligned} \frac{dQ_i}{dt} = cm_i \frac{dT_i}{dt} \Rightarrow \frac{d\Delta T}{dt} &= \frac{1}{cm_2} \frac{dQ_2}{dt} - \frac{1}{cm_1} \frac{dQ_1}{dt} = -\frac{A\kappa}{b} \left(\frac{m_1 + m_2}{cm_1 m_2} \right) \Delta T \\ \Rightarrow \tau &= \frac{bcm_1 m_2}{A\kappa(m_1 + m_2)} = 16300 \text{ s} \simeq 4 \text{ t } 30 \text{ min}. \end{aligned}$$

d) Løsning av diffign gir $\Delta T(t) = \Delta T(0) \exp(-t/\tau)$, slik at $t = 3 \text{ timer} = 10800 \text{ s}$ gir $\Delta T(t = 3 \text{ t}) = \exp(-2/3) \cdot 100 \text{ K} \simeq 50 \text{ K}$.