Norges teknisk-naturvitskapelege universitet
Institutt for fysikk

Fagleg kontakt under eksamen:
Navn: Emil J. Samuelsen
Tlf.: 93412

EKSAMEN I FAG SIF4022 FYSIKK 2

2. august 2000
Tid: 0900 – 1400

Tillatte hjelpemiddel: Rottmann: Mathematisk formelsamling. Lommekalkulator

For oppgave 3 skal kandidaten velje å svare på fire av dei seks deloppgavene.

Oppgitte formlar og data:

Mekaniske bølgjer

Effekt: $P = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 v$

Lydbølgjer

Fart: Fluidum: $v = (K/\rho_0)^{\frac{1}{2}}$, Ideell gass: $K = \gamma p_0$, Faststoff: $v = (G/\rho)^{\frac{1}{2}}$ og $(E/\rho)^{\frac{1}{2}}$

Intensitet: $I = \frac{1}{2}\rho_0 s_m^2 \omega^2 v = \frac{1}{2}\cdot\frac{p_m^2}{\rho_0 v}$

Doppler-effekt:

klassisk: v_D og v_s er valde positive i same retning: $f' = f\frac{1 - v_D/v}{1 - v_s/v}$

relativistisk: $f' = f\cdot\left(\frac{1 - v/c}{1 + v/c}\right)^{\frac{1}{2}}$

Maxwells likningar:

$$\int \varepsilon_r \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \; ; \; \int \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0 \; ; \; \int \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \; ; \; \int \frac{1}{\mu_r}\vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0\left(I + \varepsilon_0\cdot\frac{d\Phi_c}{dt}\right)$$

Interferens: N- bõlgjer $I = I_0 \left(\dfrac{\sin \frac{\phi}{2} N}{\sin \frac{\phi}{2}} \right)^2$ der ϕ er fasevinkelforskjell mellom nabobølgjer.

Diffraksjon: Enkeltspalte $I = I_0 \left(\dfrac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$ der $\alpha = \dfrac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$ ved loddrett innfall.

FYSISKE KONSTANTAR

gravitasjonskonstanten	G, f	$=$	$66{,}72$ pN $\cdot$ m^2/kg^2
standard tyngdeakselerasjon	g_n	$\overset{\text{def}}{=}$	$9{,}806\ 65$ m/s^2
lysfarten i tomt rom	c	$=$	$299{,}792\ 458$ Mm/s
tomromspermeabiliteten	μ_0	$\overset{\text{def}}{=}$	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m $= 1{,}256\ 637\ 061\ 44$ μH/m
tomromspermittiviteten	ε_0	$=$	$(c^2\ \mu_0)^{-1} = 8{,}854\ 187\ 82$ pF/m
elementærladningen	e	$=$	$1{,}60\ 2189\ \ 10^{-19}$ C
	e'	$=$	$4{,}803\ 242 \cdot 10^{-10}$ ese
Planck-konstanten	h	$=$	$6{,}626\ 18 \cdot 10^{-34}$ Js $= 4{,}135\ 70$ feV $\cdot$ s
	$\hbar$	$=$	$h/2\pi = 1{,}054\ 589 \cdot 10^{-34}$ Js
			$= 0{,}658\ 218$ feV $\cdot$ s
molar gasskonstant	R	$=$	$8{,}314\ 41$ J/(mol $\cdot$ K)
molart volum for idealgass ved			
$p_0 = 1$ atm	V_0	$=$	$RT_0/p_0 = 22{,}4138$ dm^3/mol
$= 101{,}325$ kPa			
og $T_0 = 273{,}15$ K			
Avogadro-konstanten	N_A	$=$	$6{,}022\ 045 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}
Boltzmann-konstanten	k_B	$=$	$R/N_A = 1{,}380\ 66 \cdot 10^{-23}$ J/K
Faraday-konstanten	F	$=$	$N_A e = 96{,}484\ 56$ kC/mol
Stefan-Boltzmann-konstanten	σ	$=$	$\pi^2 k^4/(60\ \hbar^3\ c^2) = 56{,}703$ nW/(m^{2}K^4)
finstrukturkonstanten	α	$=$	$\mu_0\ ce^2/2h = e'^2/(\hbar c)$
		$=$	$1/137{,}036\ 04 = 7{,}297\ 351 \cdot 10^{-3}$
Rydberg-konstanten	R_∞	$=$	$e^4\ m_e/(8\ \varepsilon_0{}^2 h^3\ c) = 1{,}097\ 373\ 18 \cdot 10^7$ m^{-1}
Bohr-radien	a_0	$=$	$4\pi\ \varepsilon_0\ \hbar^2/(m_e e^2) = \alpha/(4\pi\ R_\infty) = \hbar^2/(m_e e'^2)$
		$=$	$52{,}917\ 71$ pm
elektronradien	r_e	$=$	$\mu_0 e^2/(4\pi m_e) = e'^2/(m_e c^2) = 2{,}817\ 938$ fm
atommasseenheten	u	$\overset{\text{def}}{=}$	$\dfrac{10^{-3}}{N_A}$ kg / mol $= 1{,}660\ 566 \cdot 10^{-27}$ kg
elektronet	m_e	$=$	$9{,}10\ 9530 \cdot 10^{-31}$ kg
protonet	m_p	$=$	$1{,}672\ 649 \cdot 10^{-27}$ kg
nøytronet	m_n	$=$	$1{,}674\ 954 \cdot 10^{-27}$ kg
hydrogenatomet	$m(^1H)$	$=$	$1{,}673\ 559 \cdot 10^{-27}$ kg
deuteriumatomet	$m(^2H)$	$=$	$3{,}344\ 548 \cdot 10^{-27}$ kg
heliumatomet	$m(^4He)$	$=$	$6{,}646\ 585 \cdot 10^{-27}$ kg

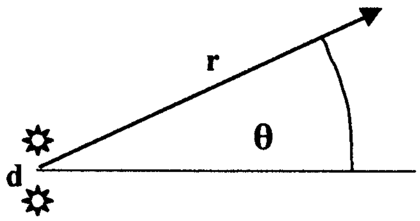
Oppgave 1

To like høgtalarar (for lyd) står midt på ein stor, rund, open plass i innbyrdes avstand $d = 1\text{m}$. Kvar høgtalar sender ut ein total-effekt på $P = 1$ W som fordeler seg likt i alle retningar (både til sides og opp og ned). Frekvensen er $f = 440$ Hz, og lydfarten i lufta er $v = 340$ m/s. Ein kan regulere faseforskjellen φ mellom dei ($\varphi = 0$ betyr at dei sender i fase).

a) Kor stor intensitet I_1 vil ein observere i ein avstand $r = 50$ m når berre ein av høgtalarane er slått på?

Angi også lydstyrkenivået (i desibel) i forhold til nedre høregrense.

b) Utlei korleis observert intensitet $I(\theta)$ vil variere med vinkelen θ (vinkelen mellom normalen til sambandslinja mellom kjeldene og observasjons-retninga, sjå skissa) når



ein detektor blir flytta på ein sirkel med radius $r = 50$ m rundt høgtalarane, og begge høgtalarane er på.

Beskriv og lag skisse for tilfellet $\varphi = 0^\circ$ (m.a. kor mange maksima og minima, og retningane for dei).

c) Detektoren står i ro ved $\theta = 0$, medan faseforskjellen φ blir regulert til å variere proporsjonalt med tida ($\varphi = p \cdot t$). Beskriv korleis observert intensitet varierer med tida. Kva blir tilsvarande intensitetsvariasjon for $\theta = 90^\circ$?

d) Gjenta spørsmål b) etter at ein tredje identisk høgtalar er blitt plassert midt mellom dei to opprinnelege, og alle tre høgtalarane er i fase.

Oppgave 2. (Sjå vedlegg 1 for nyttige integral)

a) Kva er ei Schrödinger-likning for eit fysisk system?
Klassisk energi for ein partikkel med masse m i eit eindimensjonalt harmonisk potensial kan skrivast som

$$H(p,x) = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + \frac{1}{2}kx^2$$

der p = drivet (rørslemengd/bevegelsesmengd)
x = posisjonen
k = kraftkonstant.

Forklar korleis ein frå dette kan finne at Schrödingerlikninga blir

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{1}{2}kx^2\psi=E\psi \qquad (1)$$

b) Vis at

$$\psi_1=A\cdot e^{-ax^2} \qquad (2)$$

er ei mulig løysing av Schrödingerlikninga. Vis at parameteren a er $a=\frac{1}{2}(mk)^{\frac{1}{2}}/\hbar$, og at for den aktuelle løysinga er $E=\frac{1}{2}\hbar\omega$ der $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$. Vis også ved hjelp av normaliseringskrav at parameteren $A=(mk/\pi^2\hbar^2)^{\frac{1}{8}}$.

c) Ei anna mulig løysing er

$$\psi_2=Bxe^{-ax^2} \qquad (3)$$

(der $a=\frac{1}{2}(mk)^{\frac{1}{2}}/\hbar$ og $B=(2\pi)^{\frac{1}{2}}(mk/\pi^2\hbar^2)^{\frac{3}{8}}$, men det behøver ein ikkje vise.)

Bestem uttrykk for forventingsverdiane for x og x^2 for kvar av tilstandane ψ_n med n = 1 og n = 2.

d) Ein enkel modell for elektron i metall er "partikkel-i-boks" modellen, der elektronet fritt kan bevege seg i ein boks med dimensjon lik metallstykket (L_1 L_2 L_3 i dei tre retningane).

Beskriv ein eindimensjonal "partikkel-i-boks" modell, med Schrödinger-likning og det heile (dvs. løysingar), og forklar kort kva for eigenskapar for metallet modellen kan beskrive.

Oppgave 3.

a) Skriv opp bølgjelikninga i tre dimensjoner for ei generell bølgje med bølgjefart v, og vis at likninga gjeld for ei harmonisk planbølgje.

b) Koherent laserlys med bølgjelengd λ = 780 nm blir sendt mot eit total-reflekterande objekt som har fart v_S = 100 km/h mot lyskjelda. Det er mulig med spegl-innretningar å fange opp ein del av det reflekterte lyset og å "blande" det med ein del av det opprinnelege lyset på ein slik måte at dei to strålane er like sterke og går i same retning (i ein "detektorboks" montert saman med laseren).

Beskriv resultantbølgja for dei to bølgjene (der dei er "blanda") og rekn ut svevefrekvensen.

c) I vedlagte tabell (vedlegg 2) er gitt matematiske uttrykk for bølgjefunksjonane for elektronet i hydrogen-atomet. Kva forstår ein med s, p og d-orbital, og kva betydning har orbitalane for beskrivelsen av bindingar i molekyl?

d) Beskriv kort minst to eksempel på at klassisk fysikk ikkje gir rett beskrivelse av den fysiske verda, men der kvantemekanikken fungerer.

e) Forklar korleis ein på kvantemekanisk grunnlag forstår skilnaden på elektrisk leiande, halvleiande og isolerande materiale. Nemn eksempel.

f) Et materiale i form av elastiske stavar har bølgjefart v = 4800 m/s for lydforplanting i staven. To slike stavar, med ulike lengder $L_1 = 200$ cm og $L_2 = 195$ cm er begge spende opp i begge endar.

Bestem frekvensane for dei bølgjefenomena ein kan observere når dei to oppspende stavane samtidig blir sette i svingingar i luft.

Vedlegg 1. Nyttige bestemte integral

Table A.3: Some useful definite integrals.

$\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n!$ (n integer)	
$\int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{e^x - 1}dx = \frac{\pi^2}{6} - 1$	$\int_0^\infty \frac{x^3e^{-x}}{e^x - 1}dx = \frac{\pi^4}{15}$
$\int_0^\infty \frac{dx}{1+e^x} = \ln 2$	$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{\pi}$
$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$	$\int_0^\infty xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$
$\int_0^\infty x^2e^{-x^2}dx = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}$	$\int_0^\infty x^3e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$
$\int_0^\infty x^4e^{-x^2}dx = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}$	$\int_0^\infty x^5e^{-x^2}dx = 1$
$\int_0^\infty x^6e^{-x^2}dx = \frac{15}{16}\sqrt{\pi}$	$\int_0^\infty x^7e^{-x^2}dx = 3$
$\int_0^\infty x\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx = \left(\frac{a}{\pi}\right)^2\int_0^\pi \xi\sin^2\xi d\xi = \frac{a^2}{4}$	

Vedlegg 2. Bølgjefunksjonar for hydrogenatomet

Table 19.1 Normalised eigenfunctions of the one-electron atom for $n = 1$, 2, and 3. For hydrogen $Z = 1$

n	l	m_l	$\psi_{nlm_l}(r,\theta,\phi) = R_{nl}(r)\,\Theta_{lm_l}(\theta)\,\Phi_{m_l}(\phi)$				
1	0	0	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}$	e^{-Zr/a_0}		1	1
2	0	0	$\frac{1}{4\sqrt{(2\pi)}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}$	$\left(2-\frac{Zr}{a_0}\right)$	$e^{-Zr/2a_0}$	1	1
2	1	0	$\frac{1}{4\sqrt{(2\pi)}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}$	$\frac{Zr}{a_0}$	$e^{-Zr/2a_0}$	$\cos\theta$	1
2	1	±1	$\frac{1}{8\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}$	$\frac{Zr}{a_0}$	$e^{-Zr/2a_0}$	$\sin\theta$	$e^{\pm i\phi}$
3	0	0	$\frac{1}{81\sqrt{(3\pi)}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}$	$\left(27-18\frac{Zr}{a_0}+2\frac{Z^2r^2}{a_0^2}\right)$	$e^{-Zr/3a_0}$	1	1
3	1	0	$\frac{\sqrt{2}}{81\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}$	$\left(6-\frac{Zr}{a_0}\right)\frac{Zr}{a_0}$	$e^{-Zr/3a_0}$	$\cos\theta$	1
3	1	±1	$\frac{1}{81\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}$	$\left(6-\frac{Zr}{a_0}\right)\frac{Zr}{a_0}$	$e^{-Zr/3a_0}$	$\sin\theta$	$e^{\pm i\phi}$
3	2	0	$\frac{1}{81\sqrt{(6\pi)}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}$	$\frac{Z^2r^2}{a_0^2}$	$e^{-Zr/3a_0}$	$(3\cos^2\theta-1)$	1
3	2	±1	$\frac{1}{81\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}$	$\frac{Z^2r^2}{a_0^2}$	$e^{-Zr/3a_0}$	$\sin\theta\cos\theta$	$e^{\pm i\phi}$
3	2	±2	$\frac{1}{162\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}$	$\frac{Z^2r^2}{a_0^2}$	$e^{-Zr/3a_0}$	$\sin^2\theta$	$e^{\pm 2i\phi}$