NTNU **Institutt for fysikk**

Faglig kontakt under eksamen:
Asle Sudbø (stedfortreder for faglærer Arne Brataas)
Telefon: 93403

Eksamen i SIF4022 Fysikk 2

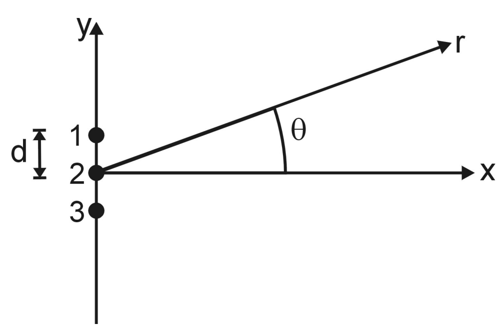
Tirsdag 3. desember 2002
09:00–14:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ C
- Godkjent lommekalkulator.
- K. Rottman: *Matematisk formelsamling*
- Barnett and Cronin: *Mathematical formulae*
- Øgrim og Lian: *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk*
- Sist i dette oppgavesettet er det gitt noen relasjoner som muligens kan være til nytte under eksamen. Kandidaten må selv tolke disse.

Dette oppgavesettet er på 4 sider.

Oppgave 1.

Tre høytalere (1, 2 og 3) står langs en rett linje (y-retningen) på en åpen plass med en lik innbyrdes avstand d =1.0m mellom dem. Hver enkelt høytaler sender ut lydbølger med en effect P =1W som fordeler seg likt i alle retninger. Vi kan regulere fase-konstanten til hver enkelt lydkilde (høytaler) og disse er ϕ_1, ϕ_2, og ϕ_3. Frekvensen er f = 440Hz og lydhastigheten i luften er v = 340m/s.



a) Finn intensiteten vi vil observere i en avstand r = 100m når bare høytaler nummer 2 er slått på.

Angi også lydstyrken (i desibel) i forhold til nedre hørselsgrense som er $I_0 = 10^{-12}\text{Wm}^{-2}$.

b) I denne og de etterfølgende del-oppgavene c) og d) antar vi at alle høytalerne er slått på.

Utled hvordan intensiteten $I(\theta)$ vil variere med vinkelen θ (vinkelen mellom normalen til linjen som forbinder høytalerne og observasjonsretningen) når en detektor blir flyttet på en sirkel med radius $r = 100$m rundt høytalerne.

c) Vi plasserer en detektor i punktet $r = 100$m og $\theta = 0$. Bestem fase-konstantene ϕ_1, ϕ_2 og ϕ_3 slik at intensiteten i dette punktet blir størst mulig.

d) Vi setter fase-konstantene til høytaler 1 og høytaler 3 lik null, $\phi_1 = \phi_3 = 0$, men lar fase-konstanten til den miderste høytaler variere i tid, $\phi_2 = \omega \cdot t$, der ω er en vinkel-frekvens vi kan endre på. Bestem intensiteten en detektor vil observere i punktet $r = 50$m og $\theta = 0$.

Oppgave 2.

Klassisk energi for en partikkel med masse m i et en-dimensjonalt harmonisk potensial kan skrives som

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2, \tag{1}$$

der p er impulsen, x er posisjonen og k er kraftkonstanten.

a) Vis *kort* hvordan vi ut ifra dette kan finne at den tidsavhengige Schrödinger-ligningen for denne partikkelen blir

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}kx^2\right]\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)\,. \tag{2}$$

b) En partikkel befinner seg i dette potensialet i en tilstand beskrevet av bølgefunksjonen

$$\psi(x,t) = \left(\frac{mk}{\pi^2\hbar^2}\right)^{1/8}\exp(-\frac{1}{2\hbar}\sqrt{mk}x^2)\exp(-if(t))\,, \tag{3}$$

der $f(t)$ er en ukjent reell tidsavhengig funksjon. Bestem funksjonen $f(t)$ og vis at egen-energien for denne tilstanden er $E = \hbar\omega/2$, der $\omega = \sqrt{k/m}$.

c) Finn forventningsverdien til posisjonen $\langle x\rangle$ og standardavvikket til posisjonen $\Delta x = \sqrt{\langle(x - \langle x\rangle)^2\rangle}$.

d) Finn forventningsverdien til impulsen $\langle p\rangle$ og standardavvikket til impulsen $\Delta p = \sqrt{\langle(p - \langle p\rangle)^2\rangle}$.

Beregn produktet av uskarpheten i posisjon og uskarpheten i impuls, $(\Delta x)(\Delta p)$, og kommenter om dette er i overenstemmelse med Heisenbergs usikkerhetsrelasjon.

Oppgave 3.

Elektronenes oppførsel i et metall kan modelleres som partikler i en boks som har den samme størrelsen som metallets utstrekning. Vi ser på en kubisk metall-bit med sidekant L og et volum L^3. Den tidsuavhengige Schrødinger-ligningen for en partikkel i metallet er dermed

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi(x,y,z) = E\Psi(x,y,z)\,, \tag{4}$$

med rand-vilkårene at partikkelen ikke kan befinne seg utenfor boksen, det vil si at

$$\Psi(x, y, z) = 0 \tag{5}$$

når et av følgende er oppfylt: $x < 0$, $x > L$, $y < 0$, $y > L$, $z < 0$ eller $z > L$.

a) Vis at Schrødinger-ligningen ovenfor gir at tilstanden til partikkelen er bestemt av tre kvante-tall n_x, n_y og n_z og at egen-energiene til systemet er

$$E_{n_x,n_y,n_z} = E_0 \left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right) , \tag{6}$$

der

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{2mL^2} . \tag{7}$$

b) I tillegg til kvante-tallene n_x, n_y og n_z vil elektron-tilstanden være bestemt av spinn-kvantetallet m_s som har to mulige verdier, $m_s = 1/2$ eller $m_s = -1/2$.

Angi de fem laveste energi-nivåene til systemet i enheter av E_0 samt antallet tilstander som gir hvert enkelt av disse fem laveste energi-nivåene. Anta at det befinner seg 14 elektroner i systemet. Beskriv hvordan grunntilstanden til 14-elektron-systemet ser ut når temperaturen er ved det absolutte nullpunkt, $T = 0$. Hva blir total-energien for dette 14-elektron systemet?

c) Hva forstår vi med Fermi-energien til et system? Utled uttrykket

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m}(3n_e\pi^2)^{2/3} , \tag{8}$$

der n_e er elektron-tettheten for den enkle metall-modellen beskrevet ovenfor.

Oppgitt:

Noen integraler som kan være nyttige:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n! \text{ (n er et heltall)} \tag{9}$$

$$\int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6} - 1 \tag{10}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3 e^{-x}}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15} \tag{11}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{1 + e^x} dx = \ln 2 \tag{12}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi} \tag{13}$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{14}$$

$$\int_0^\infty x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \tag{15}$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{4}\sqrt{\pi} \tag{16}$$

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \tag{17}$$

$$\int_0^\infty x^4 e^{-x^2} dx = \frac{3}{8}\sqrt{\pi} \tag{18}$$

$$\int_0^\infty x^5 e^{-x^2} dx = 1 \tag{19}$$

$$\int_0^\infty x^6 e^{-x^2} dx = \frac{15}{16}\sqrt{\pi} \tag{20}$$

$$\int_0^\infty x^7 e^{-x^2} dx = 3 \tag{21}$$

$$\int_0^\infty x \sin^2(\frac{\pi x}{a}) dx = \frac{a^2}{4} \tag{22}$$