NTNU **Institutt for fysikk**

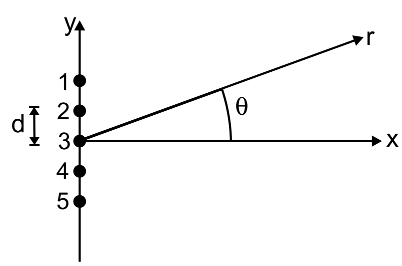
Faglig kontakt under eksamen:
Professor Arne Brataas
Telefon: 93647

Eksamen i SIF4022 Fysikk 2
Onsdag 13. august 2003
09:00–14:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ C
Godkjent lommekalkulator.
K. Rottman: *Matematisk formelsamling*
Barnett and Cronin: *Mathematical formulae*
Øgrim og Lian: *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk*
Sist i dette oppgavesettet er det gitt noen relasjoner som muligens kan være til nytte under eksamen. Kandidaten må selv tolke disse.

Dette oppgavesettet er på 4 sider.

Oppgave 1.
Fem høytalere (1, 2, 3, 4 og 5) står langs en rett linje (y-retningen) på en åpen plass med en lik innbyrdes avstand d =1.0m mellom dem. Hver enkelt høytaler sender ut lydbølger med en effekt P =10W som fordeler seg likt i alle retninger. Vi kan regulere fase-konstanten til hver enkelt lydkilde (høytaler) og disse er ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4 og ϕ_5. Frekvensen er f = 880Hz og lydhastigheten i luften er v = 340m/s.



a) Finn intensiteten vi vil observere i en (stor) avstand r = 1000m når bare høytaler nummer 3 er slått på.

Angi også lydstyrken (i desibel) i forhold til nedre hørselsgrense som er $I_0 = 10^{-12}\text{Wm}^{-2}$.

b) I denne og de etterfølgende del-oppgavene c) og d) antar vi at alle høytalerne er slått på.

Utled hvordan intensiteten $I(\theta)$ vil variere med vinkelen θ (vinkelen mellom normalen til linjen som forbinder høytalerne og observasjonsretningen) når en detektor blir flyttet på en sirkel med radius $r = 1000\text{m}$ rundt høytalerne.

c) Vi plasserer en detektor i punktet $r = 1000\text{m}$ og $\theta = 0$. Bestem fase-konstantene ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4 og ϕ_5 slik at intensiteten i dette punktet blir størst mulig.

d) Vi setter fase-konstantene til høytaler 1 og høytaler 5 lik null, $\phi_1 = \phi_5 = 0$, men lar fase-konstanten til de tre miderste høytalerne variere i tid, $\phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = \omega \cdot t$, der ω er en vinkel-frekvens vi kan endre på. Bestem intensiteten en detektor vil observere i punktet $r = 1000\text{m}$ og $\theta = 0$.

Oppgave 2.

Klassisk energi for en partikkel med masse m i en en-dimensjonal potensial-brønn kan skrives som

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + V(x), \tag{1}$$

der p er impulsen, x er posisjonen og $V(x)$ beskriver den potensielle energien i brønnen. Vi antar at brønnen er skarpt definert slik at partikkelen befinner seg innenfor et område fra $x = -a/2$ til $x = a/2$. Det betyr at $V(x) = 0$ inne i brønnen når $-a/2 < x < a/2$ og $V(x) \to \infty$ utenfor brønnen når $|x| > a/2$.

a) Vis *kort* hvordan vi ut ifra dette kan finne at den tidsavhengige Schrödinger-ligningen for denne partikkelen blir

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)\,. \tag{2}$$

b) En partikkel befinner seg i dette potensialet i en tilstand beskrevet av bølgefunksjonen

$$\psi(x, t) = A\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)g(t)\,, \tag{3}$$

når $|x| < a/2$, der $g(t)$ er en ukjent tidsavhengig funksjon, A er en normaliseringskonstant og $\psi(x,t) = 0$ når $|x| > a/2$. Bestem funksjonen $g(t)$ og vis at egen-energien for denne tilstanden er $E = \hbar^2\pi^2/(2ma^2)$.

c) Vi velger en normalisering av den tidsavhengige funksjonen slik at $|g(t)|^2 = 1$. Vis at normaliseringskonstanten er gitt ved

$$A = \sqrt{\frac{2}{a}}\,. \tag{4}$$

Finn forventningsverdien til posisjonen $\langle x\rangle$ og standardavvikket til posisjonen $\Delta x = \sqrt{\langle(x - \langle x\rangle)^2\rangle}$.

d) Finn forventningsverdien til impulsen $\langle p\rangle$ og standardavvikket til impulsen $\Delta p = \sqrt{\langle(p - \langle p\rangle)^2\rangle}$.

Beregn produktet av uskarpheten i posisjon og uskarpheten i impuls, $(\Delta x)(\Delta p)$, og kommenter om dette er i overenstemmelse med Heisenbergs usikkerhetsrelasjon.

Oppgave 3.

Elektronenes oppførsel i et to-dimensjonalt metall kan modelleres som partikler i en boks som har den samme størrelsen som metallets utstrekning. Vi ser på en kvadratisk metall-bit med sidekant L og et areal L^2. Den tidsuavhengige Schrødinger-ligningen for en partikkel i metallet er dermed

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Psi(x,y)=E\Psi(x,y)\,, \tag{5}$$

med rand-vilkårene at partikkelen ikke kan befinne seg utenfor boksen, det vil si at

$$\Psi(x,y)=0 \tag{6}$$

når et av følgende er oppfylt: $x<0$, $x>L$, $y<0$, eller $y>L$.

a) Vis at Schrødinger-ligningen ovenfor gir at tilstanden til partikkelen er bestemt av to kvante-tall n_x, og n_y og at egen-energiene til systemet er

$$E_{n_x,n_y}=E_0\left(n_x^2+n_y^2\right)\,, \tag{7}$$

der

$$E_0=\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\,. \tag{8}$$

Hvilke mulige verdier kan kvante-tallene n_x og n_y ha ?

b) I tillegg til kvante-tallene n_x og n_y vil elektron-tilstanden være bestemt av spinn-kvantetallet m_s som har to mulige verdier, $m_s=1/2$ eller $m_s=-1/2$.

Angi de seks laveste energi-nivåene til systemet i enheter av E_0 samt antallet tilstander som gir hvert enkelt av disse fem laveste energi-nivåene. Anta at det befinner seg 16 elektroner i systemet. Beskriv hvordan grunntilstanden til 16-elektron-systemet ser ut når temperaturen er ved det absolutte nullpunkt, $T=0$. Hva blir total-energien for dette 16-elektron systemet?

c) Hva forstår vi med Fermi-energien til et system? Utled uttrykket

$$E_F=\frac{\hbar^2}{2m}(3n_e\pi^2)^{2/3}\,, \tag{9}$$

der n_e er elektron-tettheten for en enkel *tre-dimensjonal* metall-modell.

Oppgitt:

Noen integraler som kan være nyttige:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n! \text{ (n er et heltall)} \tag{10}$$

$$\int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6} - 1 \tag{11}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3 e^{-x}}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15} \tag{12}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{1 + e^x} dx = \ln 2 \tag{13}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi} \tag{14}$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{15}$$

$$\int_0^\infty xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \tag{16}$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{4}\sqrt{\pi} \tag{17}$$

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \tag{18}$$

$$\int_0^\infty x^4 e^{-x^2} dx = \frac{3}{8}\sqrt{\pi} \tag{19}$$

$$\int_0^\infty x^5 e^{-x^2} dx = 1 \tag{20}$$

$$\int_0^\infty x^6 e^{-x^2} dx = \frac{15}{16}\sqrt{\pi} \tag{21}$$

$$\int_0^\infty x^7 e^{-x^2} dx = 3 \tag{22}$$

$$\int_0^\infty x \sin^2(\frac{\pi x}{a}) dx = \frac{a^2}{4} \tag{23}$$