**NTNU** **Institutt for fysikk**

Faglig kontakt under eksamen:
Stipendiat Jørn Foros
Telefon: 94388444

# Eksamen i TFY4170 Fysikk 2

Onsdag 05. desember 2007
09:00–12:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ C
- Godkjent lommekalkulator.
- K. Rottman: *Matematisk formelsamling*
- Barnett and Cronin: *Mathematical formulae*
- Øgrim og Lian: *Fysiske størrelser og enheter*
- Angell og Lian: *Fysiske størrelser og enheter*
- Sist i dette oppgavesettet er det gitt noen relasjoner som muligens kan være til nytte under eksamen. Kandidaten må selv tolke disse.

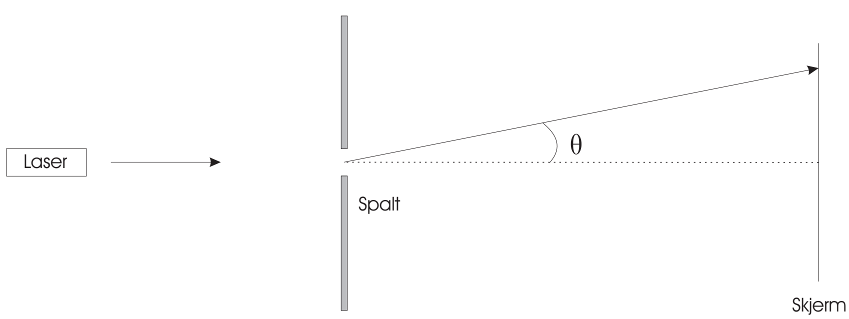
Dette oppgavesettet er på 4 sider.

## Oppgave 1. Laserlys

Laserlys med bølgelengde $\lambda$ sendes normalt inn mot en smal spalteåpning med bredde $a$ som vist i figuren under. Lyset blir avbøyd av spalten slik at intensiteten til lyset observert i en retning $\theta$ på en skjerm langt bak spalten er gitt ved

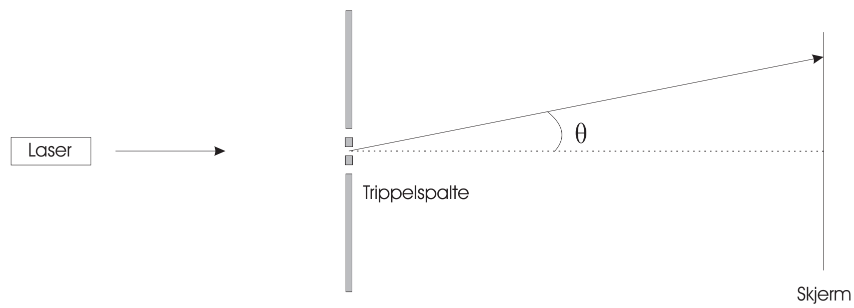
$$I_1(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}, \qquad \alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \tag{1}$$

der $I_0$ er intensiteten rett fram ($\theta = 0$).



**a)** Anta i denne del-oppgaven at avstanden mellom spalte og skjerm er 1.00 m, og at bredden til spalteåpningen er 0.115 mm. Dersom avstanden mellom sentralmaksimum og første minimum i intensitetsmønsteret på skjermen måles til 5.52 mm, hva er da bølgelengden til lyset?

Vi erstatter nå spalten med en trippelspalte, dvs. tre spalter i innbyrdes avstand $d$ (målt fra sentrum i den ene spalten til sentrum i den andre) plassert ved siden av hverandre som vist i figuren under. De tre spaltene er like og har alle bredde $a$. Spalteavstanden $d$ er mye mindre enn avstanden fra spaltene til skjermen.




**b)** Vis at intensiteten vi nå observerer er gitt ved

$$I(\theta) = I_1 \left[1 + 2\cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)\right]^2, \tag{2}$$

der $I_1$ er intensiteten gitt i ligning (1).

**c)** Gitt at $d = 2a$, skisser $I(\theta)$.

### Oppgave 2. Hydrogen og kalium

Elektronets oppførsel i hydrogen-atomet er beskrevet ved den tidsuavhengige Schrødinger-ligningen (i kulekoordinater, med atomkjernen i origo)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right]\psi(r,\theta,\phi) = E\psi(r,\theta,\phi), \tag{3}$$

der $m$ er elektronets masse, $e$ er elementærladningen, $\epsilon_0$ er permittivitetskonstanten, og $E$ energien. Nabla-operatoren er i kulekoordinater

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{4}$$

**a)** Vis ved separasjon av variable at en løsning av Schrødinger-ligningen er

$$\psi(r,\theta,\phi) = R(r)\Theta(\theta)e^{im_l\phi}, \tag{5}$$

der $R$ er en (foreløpig uspesifisert) funksjon av $r$, $\Theta$ er en (foreløpig uspesifisert) funksjon av $\theta$, og $m_l$ er en konstant. (Merk: Du skal *ikke* løse ligningen for $R$ og $\Theta$.)

**b)** Grunntilstanden til elektronet er

$$\psi_g = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}, \tag{6}$$

der $a_0$ er en konstant. Regn ut forventningsverdien til elektronets avstand $r$ fra atomkjernen i denne tilstanden.

I resten av denne oppgaven ser vi på alkalimetallet kalium (K). Kalium har protontall $Z = 19$ og befinner seg i samme gruppe som hydrogen i det periodiske system, dvs. gruppe I.

**c)** Skriv ned elektronkonfigurasjonen til K, dvs. hvordan elektronene til et K-atom er fordelt på de ulike elektron-skallene. Forklar *kort og presist* hvorfor potensialet som det ytterste elektronet i et K-atom befinner seg i er ganske likt potensialet som elektronet i et hydrogen-atom føler.

**Oppgave 3. Kvantemekanisk fri-elektron modell i 2D**

Tilstanden til et elektron i en kvadratisk *to*-dimensjonal boks kan beskrives ved de positive og heltallige kvantetallene $n_1$ og $n_2$, i tillegg til kvantetallet $m_s$ som angir elektronets spinn. Elektronets energi i en slik tilstand er

$$E_{n_1 n_2} = E_0(n_1^2 + n_2^2), \tag{7}$$

der $E_0$ er en konstant. Dersom en slik boks inneholder et svært stort antall elektroner vil separasjonen av energinivåene være svært liten i forhold til Fermienergien $E_F$. Nivåene danner derfor et kvasi-kontinuum. Utled et uttrykk for den totale energien ved 0 K i dette tilfellet, gitt ved $E_F$ og $E_0$.
Hint: Betrakt tettheten av elektron-tilstander i et fiktivt to-dimensjonalt rom med akser $(n_1, n_2)$.

**Oppgitt:**

**Noen integraler som kan være nyttige:**

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x dx = \frac{\pi}{2} - 1 \quad (8)$$

$$\int_0^{\pi/2} x\cos^2 x dx = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4} \quad (9)$$

$$\int_0^{\pi/2} x^2\cos x dx = \frac{\pi^2}{4} - 2 \quad (10)$$

$$\int_0^{\pi/2} x^2\cos^2 x dx = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} \quad (11)$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n! \text{ (n er et heltall)} \quad (12)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{xe^{-x}}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6} - 1 \quad (13)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3e^{-x}}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15} \quad (14)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + e^x} dx = \ln 2 \quad (15)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi} \quad (16)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad (17)$$

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \quad (18)$$

$$\int_0^{\infty} x^2e^{-x^2} dx = \frac{1}{4}\sqrt{\pi} \quad (19)$$

$$\int_0^{\infty} x^3e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \quad (20)$$

$$\int_0^{\infty} x^4e^{-x^2} dx = \frac{3}{8}\sqrt{\pi} \quad (21)$$

$$\int_0^{\infty} x^5e^{-x^2} dx = 1 \quad (22)$$

$$\int_0^{\infty} x^6e^{-x^2} dx = \frac{15}{16}\sqrt{\pi} \quad (23)$$

$$\int_0^{\infty} x^7e^{-x^2} dx = 3 \quad (24)$$

$$\int_0^{\infty} x\sin^2(\frac{\pi x}{a}) dx = \frac{a^2}{4} \quad (25)$$