NTNU

Institutt for fysikk

NTNU

Faglig kontakt under eksamen:
Professor Arne Brataas
Telefon: 73593647/90643170

Eksamen i TFY4170 Fysikk 2

9. desember 2008

09:00-12:00 (tre timer)

Tillatte hjelpemidler: Alternativ C

Godkjent lommekalkulator.

K. Rottman: *Matematisk formelsamling*

Barnett and Cronin: *Mathematical formulae*

Øgrim og Lian (Angell og Lian): *Fysiske størrelser og enheter*

Dette oppgavesettet er på 3 sider.

Oppgave 1. Kvantemekanikk

Vi ser på en partikkel som kan bevege seg langs én dimensjon, x-aksen. Den tidsavhengige Schrödinger ligningen er

$$\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x,t)\right]\psi(x,t) = \hat{E}\psi(x,t)\,, \tag{1}$$

der $\psi(x,t)$ er den tidsavhengige bølgefunksjonen, $V(x,t)$ er potensialet,

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \tag{2}$$

er impuls-operatoren,

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{3}$$

er energi-operatoren, $\hbar = h/(2\pi)$ og h er Plancks konstant. Vi antar i resten av oppgaven at potensialet er stasjonært $V(x,t) = V(x)$.

a) Bølgefunksjonen kan skrives som

$$\psi(x,t) = \Psi(x)\exp\left(-iEt/\hbar\right). \tag{4}$$

Vis at den tidsuavhengige bølgefunksjonen $\Psi(x)$ er løsning av den tids-uavhengige Schrödinger ligningen

$$\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)\right]\Psi(x) = E\Psi(x)\,. \tag{5}$$

b) Vi ser først på partikkelen i et område $|x| < a/2$, der det stasjonære potensialet $V(x) = 0$. Det er to mulige uavhengige løsninger av den tidsuavhengige Scrödinger ligningen (5). Vis at disse to mulige uavhengige løsningene kan skrives som

$$\Psi(x) = A\exp(ikx) + B\exp(-ikx)\,, \tag{6}$$

der A og B er normaliseringskonstanter og k er et bølgetall. Finn sammenhengen mellom bølgetallet k og energien E.

c) Uskarpheten til en fysisk størrelse O med dens assosierte kvantemekaniske operator $\hat{O}$ er definert ved

$$\delta O = \sqrt{\langle\hat{O}^2\rangle - (\langle\hat{O}\rangle)^2}\,, \tag{7}$$

der

$$\langle\hat{O}^n\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\psi^*(x,t)\hat{O}^n\psi(x,t) \tag{8}$$

og n er et vilkårlig tall, f.eks. $n = 1$ eller $n = 2$. Hva er uskarpheten til energien til partikkelen, δE, når den er i en tilstand beskrevet av $\psi(x,t) = \Psi(x)\exp(-iEt/\hbar)$ som ovenfor ?

d) Vi antar fortsatt at partikkelen kan bevege seg fritt for alle $|x| < a/2$, men det møter en hard vegg i punktene $|x| = a/2$, dvs. stasjonære potensialet er

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{når } |x| < a/2 \\ \infty & \text{når } |x| \geq a/2 \end{cases}\,. \tag{9}$$

Bestem koeffisientene A og B og finn de kvantiserte energi-nivåene til systemet.

Oppgave 2. Bølgefysikk

En bølge som brer seg langs x-aksen er beskrevet ved amplituden

$$w(x,t) = \sin(\omega(k)t - kx)\,, \tag{10}$$

der

$$\omega(k) = ck^4 \tag{11}$$

er vinkelfrekvensen, c er en konstant, t er tiden og k er bølgetallet. Uttrykk gruppehastigheten til bølgen ved dens fasehastighet (dvs. bølgefart).

Oppgave 3. Materialfysikk

Vi ser på et to-partikkel-system. Den stasjonære Schrödinger-ligningen for to-partikkel-systemet er

$$\left[\hat{H}_{\text{én}}(\mathbf{r}_1) + \hat{H}_{\text{én}}(\mathbf{r}_2)\right]\psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = E\psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\,, \tag{12}$$

der E er total-energien og $\psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ er bølgefunksjonen til to-partikkel-systemet. Vi antar at vi har et system der de to laveste én-partikkel-tilstandene er henholdsvis $\psi_1(\mathbf{r})$ med egen-energi E_1 og $\psi_2(\mathbf{r})$ med egen-energi E_2, dvs.

$$\hat{H}_{\text{én}}(\mathbf{r})\psi_1(\mathbf{r}) = E_1\psi_1(\mathbf{r}) \tag{13}$$

og

$$\hat{H}_{\text{én}}(\mathbf{r})\psi_2(\mathbf{r} = E_2\psi_2(\mathbf{r})\,. \tag{14}$$

Hva er den laveste egen-energien E og den tilhørende bølgefunksjonen $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ for et to-partikkel-system med koordinater $\mathbf{r}_1$ og $\mathbf{r}_2$ dersom a) de to partiklene er bosoner og b) de to partiklene er fermioner? Vi ser bort fra partiklenes spinn.