NTNU
Det skapende universitet
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:
Erlend Grytli Tveten
Telefon: 45469658

Eksamen i TFY4170 Fysikk 2

6. desember 2012
09:00-13:00 (fire timer)
Norsk bokmål

Tillatte hjelpemidler: Alternativ C

- Godkjent lommekalkulator
- K. Rottmann: *Matematisk formelsamling*
- Barnett & Cronin: *Mathematical formulae*
- Angell & Lian (Øgrim & Lian): *Fysiske størrelser og enheter*

Dette oppgavesettet er på 4 sider og inneholder 3 oppgaver og 12 deloppgaver. Alle deloppgavene teller likt på resultatet. Siste side inneholder noen formler som kan være til nytte. Les oppgavene nøye, da flere spørsmål kan være lagt inn i hver deloppgave.

Lykke til!

Oppgave 1. Elektronstråler

Et sveipeelektronmikroskop (SEM) vil typisk akselerere elektroner i et potensial $U = 1$ kV.

a) Vis at elektronenes klassiske hastighet etter akselerasjonen er gitt som

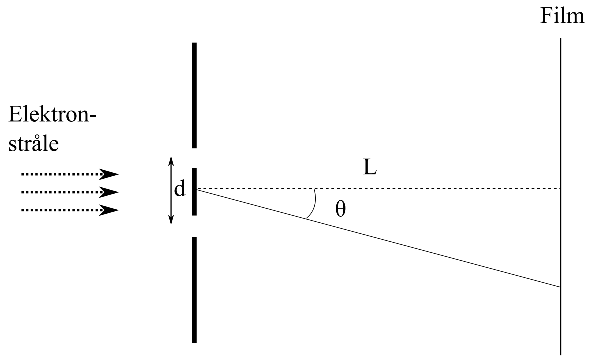
$$v_e = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}} \tag{1}$$

hvor e og m_e er henholdsvis elektronenes ladning og masse. Finn tallsvar for hastigheten v_e, og kommenter om det burde være nødvendig å gjøre relativistiske korreksjoner i denne oppgaven.

I resten av oppgaven ser vi bort fra eventuelle relativistiske korreksjoner.

b) Forklar kort hva vi mener med bølge/partikkel-dualitet i kvantemekanikken, og regn ut bølgelengden til elektronene i oppgave a).

Youngs dobbeltspalteeksperiment for elektroner var lenge sett på som kun et tankeeksperiment, men ved hjelp av nanoteknologi kan man lage spalter med spalteavstand på nanometer skala. Vi ser for oss at elektronstrålen blir rettet mot en dobbeltspalte med spalteavstand d, for deretter å treffe en elektrosensitiv film en avstand L bak spaltene (se Figur 1). Vi antar at $L \gg d$, og at vi kan se bort fra diffraksjonseffekter fra hver spalteåpning.



Figur 1: Tospalteinterferens for elektroner.

c) Beskriv kvalitativt hvordan intensiteten til elektronstrålen vil fordele seg på filmen, og vis ved hvilke vinkler θ_{max} vi vil finne intensitetsmaksima, som funksjon av d og λ.

d) Utled hvordan intensiteten varierer som funksjon av θ, d og λ. Hint: Intensiteten er proporsjonal med absoluttkvadratet av elektronets bølgefunksjon, $I \propto A^*A$. Bølgene fra de to spaltene vil være koherente, men med en faseforskjell.

Oppgave 2. Kvantemekanikk

Den klassiske hamiltonfunksjonen for en partikkel som beveger seg i én dimensjon angir totalsummen av kinetisk og potensiell energi: $H = K + V$. Her beskriver $K = \frac{p_x^2}{2m}$ kinetisk energi, p_x er impuls, m er partikkelens masse, mens $V(x)$ er et vilkårlig potensial. Ved å la de kvantemekaniske operatorene for impuls og energi, $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ og $\hat{H} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, virke på bølgefunksjonen $\Psi(x,t)$, kommer man frem til den tidsavhengige Schrödingerligningen i én dimensjon

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} \tag{2}$$

Denne ligningen kan løses blant annet ved å bruke metoden *separasjon av variable*, der bølgefunksjonen skrives som en kombinasjon av en tidsavhengig og en romlig del: $\Psi(x,t) = \psi(x)f(t)$.

a) Bruk separasjon av variable til å bestemme funksjonen $f(t)$ og å utlede den tidsuavhengige Schrödingerligningen for $\psi(x)$:

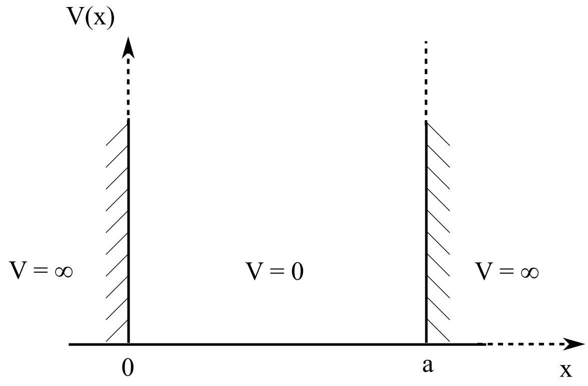
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x). \tag{3}$$

Vi skal nå anta at en partikkel er fanget i en én-dimensjonal potensialbrønn (som vist i figur 2) med "harde"vegger ($V(x \leq 0) = \infty$, $V(0 < x < a) = 0$, $V(x \geq a = \infty)$) og at den romlige delen av partikkelens bølgefunksjon oppfyller ligning (3).

b) Argumentér for at partikkelens bølgefunksjon må være null i området til venstre for $x = 0$ og til høyre for $x = a$, og vis at de generelle løsningene av Schrödingerligningen i området $0 < x < a$ er gitt som

$$\psi_n(x) = B\sin(\frac{n\pi x}{a}), \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{4}$$

Skissér de tre første løsningene, og vis at energinivåene er kvantiserte som $E_n = \hbar^2\pi^2n^2/2ma^2$.



Figur 2: Partikkel i boks

c) Hva mener vi med *sannsynlighetstolkningen* av en partikkels bølgefunksjon? Bruk denne tolkningen til å bestemme normaliseringskonstanten B.

Vi ser nå for oss at potensialet til høyre for $x = a$ senkes til den konstante verdien $V_a = 2E_1$, hvor E_1 er energien til grunntilstanden fra oppgave b).

d) Hvor mange bundne tilstander har dette nye systemet? Skissér hvordan grunntilstanden ψ_1 nå vil se ut. Bruk den tidsuavhengige Schrödingerligningen (3) til å argumentere for hvordan energien i grunntilstanden vil påvirkes i dette tilfellet.

Oppgave 3. Materialfysikk

Denne oppgaven handler om halvledere og energinivå. I halvlederen germanium er elektronstrukturen for valenselektronene $4s^24p^2$.

a) Forklar kort hvordan notasjonen er relatert til kvantetallene n, l og m. Hva kan du si om banedreieimpulsen L til valenselektronene i germanium?

I grunnstoffene gallium og arsen er elektronstrukturen til valenselektronene henholdsvis $4s^24p^1$ og $4s^24p^3$.

b) Forklar forskjellen på intrinsiske og ekstrinsiske (dopede) halvledere. Hvilket av stoffene gallium og arsen ville du tatt i bruk for å gjøre germanium henholdsvis p-dopet og n-dopet? Begrunn svaret ditt.

c) Skissér hvordan elektronenergivåene ser ut for intrinsisk, p-dopet og n-dopet germanium ved $T = 0$ K. Hva menes med Fermienergien E_F? Spesifiser hvordan denne påvirkes av dopingen.

d) Forklar kort hva en pn-overgang er. Argumentér ved hjelp av ord eller skisser for hvordan kravet om konstant Fermienergi E_F ved likevekt gir opphav til båndbøying.

Vedlegg

Konstantene og variablenes betydning ventes å være kjent.

Noen konstanter

$$e = 1,60 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$$
$$h = 6,63 \cdot 10^{-34}\ \text{Js}$$
$$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}\ \text{Kg}$$
$$c = 3,00 \cdot 10^{8}\ \text{ms}^{-1}$$

Energi til ladning i potensial

$$E = qU$$

de-Broglies bølgerelasjon og Einstein-relasjonen

$$\lambda = \frac{h}{p}$$
$$E = hf = \hbar\omega$$

Trigonometriske relasjoner

$$\begin{aligned}
e^{i\alpha} &= \cos\alpha + i\sin\alpha \\
\cos\alpha &= \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \\
\sin\alpha &= \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \\
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) \\
\cos^2\alpha &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha
\end{aligned}$$

Noen trigonometriske integraler

$$\int_0^{n\pi} \sin^2 u \text{du} = \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$
$$\int_0^{n\pi} u\sin^2 u \text{du} = \frac{n^2\pi^2}{4}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Orbitaler i kulekoordinater er gitt ved bølgefunksjonene

$$\psi_{n,l,m}(r,\theta,\phi) = R_{n,l}(r)\Theta_{l,m}(\theta)\Phi_m(\phi),$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$
$$l < n$$
$$-l \leq m \leq l.$$

Dreieimpulsoperatorer

$$\hat{L}^2\psi_{nlm} = l(l+1)\hbar^2\psi_{nlm}$$
$$\hat{L}_z\psi_{nlm} = m\hbar\psi_{nlm}$$
$$\hat{S}^2\chi_{sm_s} = s(s+1)\hbar^2\chi_{sm_s}$$
$$\hat{S}_z\chi_{sm_s} = m_s\hbar\chi_{sm_s}$$