LØYSINGAR

Eksamen i SIF 4022 Fysikk 2 (1)

2. august 2000

Oppgave 1

a) Høgtalarane er punktkjelder, og intensiteten varierer som $I = C/r^2$, dvs. effekten P fordeler seg over alle retningar 4π

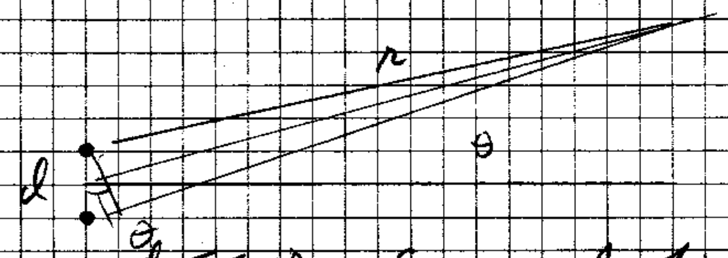
$$I_1 = P/4\pi r^2 = \frac{1\ W}{4\pi \cdot 50^2\ m^2} = \underline{\underline{3,183\cdot 10^{-5}\ \frac{W}{m^2}}}$$

Høyregrensa er $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$

$$\beta = 10\log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) = 10\cdot\log\left(3,183\cdot 10^{-5}/10^{-12}\right) =$$

$$10\ (\log 3,183 + 7) = 10\cdot 7,503 = \underline{\underline{75\ dB}}$$

b)



Her er $d \ll r$. Gangvegsforskjellen frå dei to høgtalarane blir $\Delta r = d\sin\theta$

Og resultantamplituden blir

$$E = E_1 + E_2 = E_1(1 + e^{i\alpha})$$

og $I = C\cdot E_1^2\,(1+e^{i\alpha})(1+e^{-i\alpha})$

$$= I_1\,(1 + 1 + e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) = 2I_1\,(1+\cos\alpha)$$

$$= \underline{\underline{4I_1\cos^2\frac{\alpha}{2}}}$$

der $\alpha = \phi + \frac{2\pi\Delta r}{\lambda} = \underline{\phi + 2\pi\, d\sin\theta/\lambda}$

Bølgjelengda $\lambda \cdot f = v$

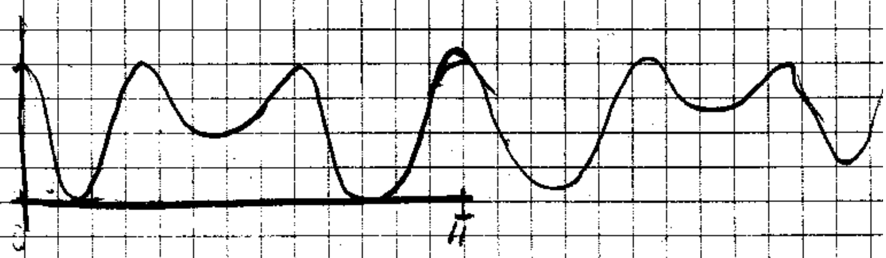
$$\lambda = 340/440 \text{ m} = 0{,}773 \text{ m}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{0{,}773} \cdot 1 \sin\theta = 4{,}0642 \sin\theta \text{ (radianar)}$$

$$I = 4I_1 \cos^2\left(\frac{180}{\pi} \cdot \frac{\pi}{0{,}773} \cdot 1 \sin\theta\right)$$

$$= 4I_1 \cos^2(232{,}86 \sin\theta)$$

Mønsteret blir



Maks når $\frac{\alpha}{2} = \pi \cdot m$ $\quad \pi d \sin\theta/\lambda = \pi \cdot m$

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{d} \cdot m = 0{,}773 \cdot m$$

$m = 0$	$m = \pm 1$
$\theta = 0, 180°$	$\theta = \pm 50{,}62°$ og $\pm 129{,}38°$

D: 6 maksima.

3

Bølgjelengda blir $\lambda \cdot f = v$

$$\lambda = \frac{340}{440}\ \text{m} = 0{,}773\ \text{m}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{2\pi}{0{,}773} \cdot 1 \sin\theta = 8{,}131 \sin\theta \quad (\text{rad})$$

$$I = 4 I_1 \cos^2(8{,}131 \cdot \sin\theta)$$

Maks når $\frac{\alpha}{2} = n \cdot \pi$

Min når $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}(2n+1)$

$$\frac{2\pi\, d \sin\theta}{\lambda} = \pi(2n+1)$$

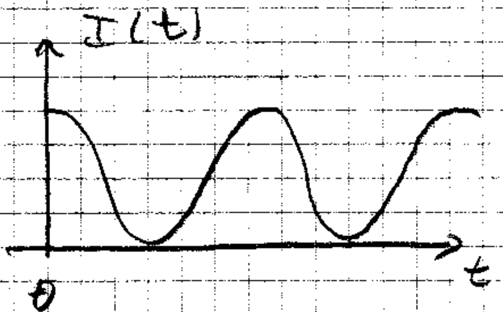
$$\sin\theta = \frac{\lambda}{2d}(2n+1)$$

$$\theta = 22{,}74^\circ \quad n = 0$$

$\sin\theta > 1$ for $n = 1$, ikkje mulig.

c) $\alpha = p \cdot t$

$I(t) = 4 I_1 \cos^2\left(\frac{p \cdot t}{2}\right)$



Maks når $\frac{pt}{2} = \pi \cdot n$

$t = \frac{2\pi}{p} \cdot n$ $\quad$ n = hele tall

Null intensitet midt i mellom (for $n + \frac{1}{2}$)

For $\theta = 90°$ blir variasjonen

$I(t) = 4 I_1 \cos^2\left(\frac{pt}{2} + \frac{\pi}{\lambda} d\right)$, dvs. samme oppførsel faseforskjøvet med vinkelen $\frac{\pi}{\lambda} d \Rightarrow 232{,}86°$

d)

Nå blir amplituden

$E = E_1 \left(1 + e^{i\beta} + e^{-i\beta}\right) = E_1 \left(1 + 2\cos\beta\right)$

der $\beta = 2\pi \frac{d}{2} \sin\theta / \lambda = \frac{\pi d}{\lambda} \sin\theta$

$I = I_1 \left(1 + 2\cos\beta\right)^2$

$= I_1 \left(1 + 4\cos^2\beta + 4\cos\beta\right)$

$= 4 I_1 \cos^2\beta + I_1 \left(1 + 4\cos\beta\right)$

(Jfr. $I = 4 I_1 \cos^2\beta$ for to)

Oppgave 2

a) Schrödingerlikninga er eit uttrykk som beskriv tilstanden til eit kvante-mekanisk system. Det kan uttrykkast ut frå klassisk energi for systemet, dvs. summen av kinetisk energi $\frac{1}{2m}p^2$ og potensiell energi $U(x)$ ved at dei p og posisjonskoordinat x blir oppfatta som operatorar ved at $p_x \to -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ og $x \to x$.

For $H = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + \frac{1}{2}k x^2$

får eg $p^2 \to \left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$

idet $i \cdot i = -1$.

Operatorane verkar på tilstandsfunksjonen Ψ.

b) Vi må finne $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A\cdot e^{-ax^2}\right) = A\, e^{-ax^2}(-2ax)$$
$$= -2Aa\, x\, e^{-ax^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(A e^{-ax^2}\right) = -2Aa\left[e^{-ax^2} - 2ax^2 e^{-ax^2}\right]$$
$$= -2Aa\, e^{-ax^2}(1 - 2ax^2).$$

Set inn

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(-2Aa)e^{-ax^2}(1-2ax^2) + \frac{1}{2}k x^2 A\cdot e^{-ax^2} = E\cdot A e^{-ax^2}$$

Dette passar når $\frac{2\hbar^2 a}{2m}(1-2ax^2) + \frac{1}{2}k x^2 = E$

For at likninga skal gjelde for alle x må ein ha at

$$\left(-\frac{2\hbar^2 a^2}{m} + \frac{1}{2}k\right)x^2 = 0$$

$$\therefore \quad a = \frac{1}{2\hbar}(mk)^{\frac{1}{2}}.$$

Då får vi att $E = \dfrac{\hbar^2 a}{2m}$

$$= \frac{\hbar \; \frac{1}{2}(mk)^{\frac{1}{2}}}{2 \quad 2m} = \underline{\underline{\hbar\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}}}$$

Det krevst at bølgjefunksjonen er normalisert $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi \, dx = 1$

$$\therefore \quad A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2ax^2} dx = 1$$

$$2A^2 \cdot \int_0^\infty e^{-2ax^2} dx = 1$$

Ta $\quad 2ax^2 = y^2 \qquad x = y/\sqrt{2a}$

$$\int_0^\infty e^{-y^2} \frac{dy}{\sqrt{2a}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2a}}$$

$$\therefore \; A^2 \sqrt{\frac{\pi}{2a}} = 1 \qquad \underline{\underline{A}} = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} = \underline{\underline{\left(\frac{mk}{\pi^2 \hbar^2}\right)^{\frac{1}{8}}}}$$

c) $\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi \, x^n \psi \, dx$

For $n = 1$: $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2} x \, dx = 0$ p.g.a. at funksjonen endrer fortegn for $x = 0$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2} x^2 \, dx$$

$$= 2 \int_0^{\infty} e^{-2x^2} x^2 \, dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-y} y^2 \, dy \frac{1}{(2a)^{3/2}}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{(2a)^{3/2}} \frac{1}{4} \pi^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{(2a)^3}}}}$$

med $a = \left(\frac{mk}{4\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}}$

For $n = 2$ $\langle x \rangle = 0$ igjen $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2} x^3 \, dx = 0$

$$\langle x^2 \rangle = B^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2ax^2} x^4 \, dx = B^2 \int e^{-y} y^4 \, dy \frac{1}{(2a)^{5/2}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{B^2}{(2a)^{5/2}} \cdot \frac{3}{8} \pi^{\frac{1}{2}}}}$$

d) Elektronet er fritt til å bevege seg i boksen, dvs. det har ingen potensiell energi i boksen. Utanfor boksen kan ein tillegge det eit potensial som er $U(x) = \infty$ (for båda områda).

I boksen $H = \frac{1}{2m}p^2 + 0$

utanfor boksen $H = U(x) = \infty$

Schrödinger-likninga i boksen blir:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi = E\cdot\psi$$

Frie partiklar har ei vandrande-bølgje-tilstandsfunksjon av forma (for kvar retning)

$$\psi = A\cdot e^{ikx} + B\cdot e^{-ikx}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = ikAe^{ikx} - ikB\cdot e^{-ikx}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2Ae^{ikx} - k^2Be^{-ikx} = -k^2(Ae^{ikx} + Be^{-ikx}) = -k^2\psi$$

$$\Rightarrow: \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\psi = E\cdot\psi$$

eller $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

Bølgjefunksjonen må vere null utanfor boksen, $\Rightarrow$:

for $x = 0$ og $x = L_1$

$0 = A + B \qquad B = -A \quad \Rightarrow: \psi = 2iA\sin(kx)$

$0 = Ae^{ikL_1} - Ae^{-ikL_1} \quad \Rightarrow: 2iA\sin(kL_1) = 0$

For $n = \pm 1, \pm 2 \ldots \Rightarrow \quad k = \frac{\pi}{L_1} n$

Bølgjefunksjonane blir ståande bølgjer der bølgjevektoren k er kvantisert

$$k = \frac{\pi}{L_1} n \quad , \text{ og eigenenergien}$$

er kvantisert

$$\underline{\underline{E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2 m L_1^2} \frac{1}{n^2}}}$$

Fri-elektron-i-boks-modellen saman med Pauliprinsippet gir ein god beskrivelse av

spesifikk varmekapasitet

og gir grunnlag for å beskrive

elektriske leiingsevne

termiske leiingsevne

og gir eit bra utgangspunkt for "band-beskrivelsen" av elektron i metall og halvleiarar

Oppgave 3

a) Bølgjelikninga for ei bølgje $f(\vec{r}, t)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Planbølgje $f(\vec{r},t) = F \cdot \exp(\, i\,(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}))$

$$= F \exp(\, i\,(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z))$$

der $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$

Deriverer:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -i\omega f$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\omega^2 f$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -ik_x F e^{i(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z))} = -ik_x f$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -k_x^2 f$$

Tilsvarande

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -k_y^2 f$$

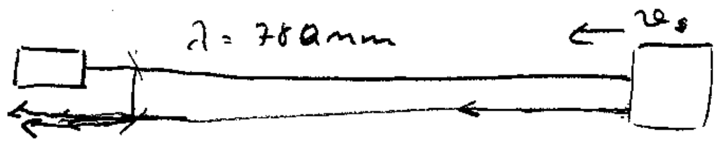
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -k_z^2 f$$

Set inn: $-\underbrace{(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)}f + \frac{\omega^2}{v^2} f \doteq 0$

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{v^2}\right) f = 0$$

$\therefore$ Ok når $\underline{\underline{\omega = k \cdot v}}$ som gjeld for alle bølgjer.

b)



$v_s = 100 \cdot 10^3 \, m / 3600 s$
$= 27{,}78 \, m/s$

Der blir ein Doppler-forandring av frekvensen for det reflekterte lyset

$$f_0 = c/\lambda = \frac{3.0 \cdot 10^8}{780 \cdot 10^{-9}} \, s^{-1} = 3{,}846 \cdot 10^{14} \, s^{-1}$$

$$\frac{v_s}{c} = \frac{27.78}{3.0 \cdot 10^8} = 9.26 \cdot 10^{-8} << 1.$$

Ein kan bruke relativistisk Doppler, men også klassisk beskrivelse er bra nok

$$f' = f_0 / (1 - \frac{v_s}{c}) = f_0 (1 + \frac{v_s}{c}).$$

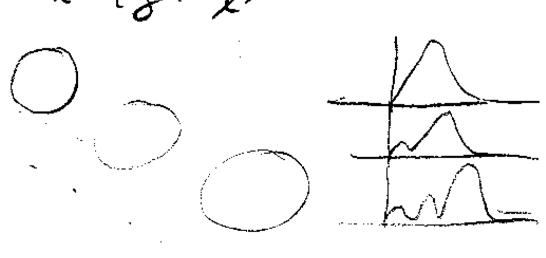
Det oppstår sveving mellom dei to bølgjene, med svevefrekvens lik

$$f' - f_0 = f_0 \frac{v_s}{c} \qquad (f' > f_0).$$

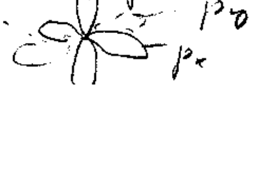
$$= \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{v_s}{c} = \frac{v_s}{\lambda} = \frac{27{,}78}{780 \cdot 10^{-9}} \, s^{-1} = \underline{\underline{3{,}56 \cdot 10^7 \, s^{-1}}}$$

c) <u>s-orbitalar</u> er for bølgjefunksjonane med kvantetalla l (og m_l) $= 0$. Dei har kulesymmetri

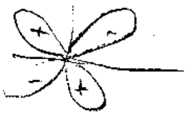
$n = 1$ $(l = 0)$
$n = 2$ $l = 0$
$n = 3$ $l = 0$



<u>p-orbitalar</u> har $l = 1$, er ikkje kulesymmetriske, men har utposingar i visse retningar t.d. langs x, y og z-aksane



d-orbitalar har $l = 2$ og har meir kompliserte utposingar



d_{xy}

etc.

For p- og d-orbitalane er elektronfordelinga meir konsentrert (i utposingane). Kjemiske kovalente bindingar blir danna ved overlapping mellom orbitalane av atoma som blir bundne saman, og p- og d-orbitalar fører derfor til sterkare kovalente bindingar enn s-orbitalar (t.d. for karbon: grafitt og diamant).

d) – Frekvens-spektret av svart-stråling frå fast stoff. Klassisk fysikk tilseier at strålinga skulle vere uendeleg sterk for høge frekvensar ("ultrafiolett katastrofe").

– Foto-elektrisk effekt. For å få frigjort elektron frå fast stoff ved bestråling er det ikkje nok å auke intensiteten av stråling. Frekvensen må vere over ein viss terskel

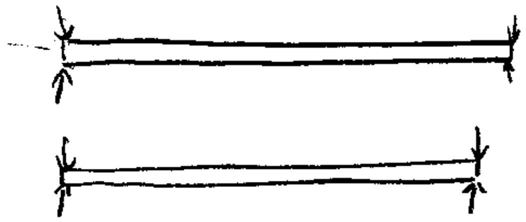
– Partikkel-stråling (t.d. elektron-strålar og nøytron-strålar) fører til diffraksjons-effekter: krystall-gitter.

e) Ved første tilnærming kan elektrona i fast stoff behandlast som ein gass av elektron som følgjer Pauli-prinsippet og derfor ønskjer å gå inn i lågaste ledige tilstand. Denne gassen blir beskriven av bølgjefunksjonar som er ståande bølgjer i stoffet.
Dersom ein tar omsyn til at stoffet er krystallinsk, vil visse energiar (bølgjelengder) bli diffraktert i stoffet, dei vil utgjere forbodne energiar ("forbodne band") som skil tillatte energiar ("tillatte band"). Avstanden i energi mellom tillatte nivå blir kalla energi-gap E_g.

Dersom der er akkurat nok elektron i stoffet til å fylle eit tillatt band, blir stoffet elektrisk isolerande. (PVC, glass)
I motsett fall er det eit metall (elektrisk leiande).
Dersom bandgapet E_g ikkje er for stort, kan likevel enkelte elektron bli eksitert opp til neste tillatte nivå, og stoffet vil ha ei viss leiingsevne, som vil auke dersom temperaturen aukar. Dette stoffet er halvleiande, som Si, Ge, GaAs, og gjeld enkelte polymer

Na, Ca, Fe, Al ...

f)



L_1

L_2

Ståande bølgjer blir indusert. Der må vere knutar i endane

): $L_i = \frac{\lambda_i}{2}\cdot n$ $\qquad \lambda_i = \frac{2L_i}{n}$

n = heile tall.

Frekvensar $\qquad f_i = v/\lambda_i = \frac{v}{2L_i}\cdot n$

Dei to stavane vil svinge med ulike frekvensar $f_1 = \frac{4800}{4.00}\cdot n = \underline{\underline{1200\cdot n\ s^{-1}}}$

$f_2 = \underline{\underline{1230.8\cdot n\ s^{-1}}}$

Lydbølgjer med dei to frekvensane blir skapt

Pluss sveving mellom dei, som vil ha svevefrekvens $\underline{\underline{f_2 - f_1 = 30.8\cdot n\ s^{-1}}}$

$n = 1, 2 \ldots$