NTNU

Institutt for fysikk
Fakultet for naturvitenskap og teknologi

Løsningsforslag til eksamen i SIF4022 Fysikk 2

Tirsdag 3. desember 2002

Dette løsningsforslaget er på 6 sider.

Oppgave 1.

a) Amplituden i avstand r fra en kule-bølge er

$$y(r,t) = \frac{A}{r} \exp i(kr - \omega t + \phi)\,. \tag{1}$$

Den totale effekten som brer seg gjennom et kule-skall er bevart. Arealet av et kule-skall er $4\pi r^2$. Intensiteten i avstand r fra høytaler nummer 2 er derfor

$$I_2(r) = \frac{P}{4\pi r^2} = |y_2(r,t)|^2\,. \tag{2}$$

Vi velger dermed $A = \sqrt{P/(4\pi)}$. Vi setter inn $P =$1W og $r = 100$m og får

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2} = 0.8 \times 10^{-5}\mathrm{Wm}^{-2}\,. \tag{3}$$

Nedre hørselsgrense er $I_0 = 10^{-12}\mathrm{Wm}^{-2}$. Lydstyrken i desibel er dermed

$$\beta = 10\log\frac{I}{I_0} = 10\log\frac{0.8\times 10^{-5}}{10^{-12}} = 69\mathrm{dB}\,. \tag{4}$$

b) Her er avstanden d mellom høytalerne mye mindre enn avstanden r. Avstands-forskjellen mellom høytaler 1 og høytaler 2 og mellom høytaler 2 og høytaler 3 er

$$\Delta r = d sin\theta\,. \tag{5}$$

Det resulterer i en relative fase-forskjell p.g.a. gang-avstanden som er

$$\alpha = k\Delta r\,. \tag{6}$$

Den resulterende amplituden fra de tre høytalerne blir dermed

$$\begin{aligned} y(r,t) &= y_1(r,t) + y_2(r,t) + y_3(r,t) && (7)\\ &= y_2(r,t)\,[1 + \exp i(\phi_3 - \phi_2 + \alpha) + \exp i(\phi_1 - \phi_2 - \alpha)] && (8)\\ &= \sqrt{\frac{P}{4\pi}}\frac{1}{r}\,[1 + \exp i(\phi_3 - \phi_2 + kd\sin\theta) + \exp i(\phi_1 - \phi_2 - kd\sin\theta)] && (9) \end{aligned}$$

Intensiteten er dermed gitt ved

$$\begin{aligned} I &= \frac{P_2}{4\pi r^2}\,|1 + \exp i(\phi_3 - \phi_2 + kd\sin\theta) + \exp i(\phi_1 - \phi_2 - kd\sin\theta)|^2 && (10)\\ I &= \frac{P_2}{4\pi r^2}\times \\ &\quad [3 + 2\cos(\phi_3 - \phi_2 + kd\sin\theta) + \\ &\quad 2\cos(\phi_1 - \phi_2 - kd\sin\theta) + 2\cos(\phi_3 - \phi_1 + 2kd\sin\theta)]\,. && (11) \end{aligned}$$

c) Intensiteten er størst i dette punktet når alle fasene er like, $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3$.

d) Intensiteten er gitt ved

$$\begin{aligned} I &= \frac{P_2}{4\pi r^2}\times \\ &\quad [3 + 2\cos(\phi_3 - \phi_2 + kd\sin\theta) + \\ &\quad 2\cos(\phi_1 - \phi_2 - kd\sin\theta) + 2\cos(\phi_3 - \phi_1 + 2kd\sin\theta)]\,. && (12) \end{aligned}$$

Vi setter inn $\phi_1 = 0 = \phi_3$, $\theta = 0$ og bruker $P/(4\pi r^2) = 3.2 \times 10^{-5}\mathrm{Wm}^{-2}$ og får

$$I = 1.6 \times 10^{-4}[1 + \frac{4}{5}\cos(\omega t)] \tag{13}$$

Oppgave 2.

a) Schrødinger-ligningen er gitt ved

$$H(p_{\rm op}, x)\psi(x,t) = E_{\rm op} = \psi(x,t)\,. \tag{14}$$

Impuls-operatoren er

$$p_{\rm op} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\,. \tag{15}$$

og energi-operatoren er

$$E_{\rm op} = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\,, \tag{16}$$

og innsatt gir dette Schrødinger-ligningen vi skulle vise.

b) Separasjon av variable

$$\psi(x,t) = \Psi \exp\left(-if(t)\right) \tag{17}$$

gir den tidsuavhengige Schrødinger-ligningen

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}kx^2\right]\Psi(x) = E\Psi(x)\,. \tag{18}$$

og ligningen for den tidsavhengige funksjonen $f(t)$:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\exp\left(-if(t)\right) = E\exp\left(-if(t)\right)\,. \tag{19}$$

Løsningen er dermed

$$f(t) = \frac{E}{\hbar}t\,. \tag{20}$$

Vi bestemmer så egen-energien E fra den tidsuavhengige Schrødinger-ligningen. Den første deriverte av bølgefunksjonen er

$$\frac{d}{dx}\Psi(x) = -\frac{1}{\hbar}\sqrt{mk}x\Psi(x)\,. \tag{21}$$

Den andre-deriverte av bølgefunksjonen er

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = \left[-\frac{1}{\hbar}\sqrt{mk} + \frac{1}{\hbar^2}mkx^2\right]\Psi(x)\,. \tag{22}$$

Den tidsuavhengige Schrødinger-ligningen gir dermed

$$
\begin{aligned}
H(p_{\mathrm{op}}, x)\Psi(x) &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{1}{\hbar}\sqrt{mk} + \frac{1}{\hbar^2}mkx^2\right) + \frac{1}{2}kx^2\right]\Psi(x) \\
&= \frac{1}{2}\hbar\sqrt{k/m}\Psi(x) \qquad (23) \\
&= E\Psi(x) \qquad (24)
\end{aligned}
$$

Vi identifiserer $\omega = k/m$ og har dermed funnet at egen-energien er $E = \hbar\omega/2$.

c) Forventnings-verdien til posisjonen er

$$
\begin{aligned}
\langle x(t)\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t)x\psi(x,t)dx \qquad (25) \\
\langle x(t)\rangle &= (\frac{mk}{\pi^2\hbar^2})^{1/4}\int_{-\infty}^{\infty} x\exp{(-\frac{1}{\hbar}\sqrt{mk}x^2} \qquad (26) \\
& \qquad (27)
\end{aligned}
$$

Vi ser da at $\langle x(t)\rangle = 0$ ved symmetri. Fluktuasjonene i posisjonen er gitt ved

$$
\begin{aligned}
\langle x^2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t)x^2\psi(x,t)dx \qquad (28) \\
\langle x^2\rangle &= (\frac{mk}{\pi^2\hbar^2})^{1/4}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\exp{(-\frac{1}{\hbar}\sqrt{mk}x^2)}dx \qquad (29) \\
& \qquad (30)
\end{aligned}
$$

Vi substituerer $u = (mk)^{1/4}/\hbar^{1/2}$ og får

$$
\begin{aligned}
\langle x^2\rangle &= (\frac{mk}{\pi^2\hbar^2})^{1/4}(\frac{\sqrt{mk}}{\hbar})^{-3/2}\int_{-\infty}^{\infty} u^2\exp{(-u^2)}du \qquad (31) \\
\langle x^2\rangle &= (\frac{mk}{\pi^2\hbar^2})^{1/4}(\frac{\sqrt{mk}}{\hbar})^{-3/2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \qquad (32) \\
\langle x^2\rangle &= \frac{1}{2}\hbar\frac{1}{\sqrt{mk}}\,. \qquad (33)
\end{aligned}
$$

Dette gir

$$
\Delta x = \left(\frac{1}{2}\hbar\frac{1}{\sqrt{mk}}\right)^{1/2}\,. \qquad (34)
$$

d) Impuls-operatoren er $p_{\text{op}} = (\hbar/i)\partial/\partial x$. Vi finner først

$$p_{\text{op}}\Psi = i\sqrt{mk}x\Psi\,. \tag{35}$$

Ved symmetry ser vi dat at

$$\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t)p_{\text{op}}\psi(x,t) = 0\,. \tag{36}$$

Ved delvis integrasjon finner vi

$$\langle p^2\rangle = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x)\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) \tag{37}$$

$$\langle p^2\rangle = \hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{d}{dx}\Psi(x))^2 \tag{38}$$

$$\langle p^2\rangle = mk\langle x^2\rangle \tag{39}$$

$$\langle p^2\rangle = \frac{1}{2}\hbar\sqrt{mk} \tag{40}$$

Dette gir

$$\Delta p = \left(\frac{1}{2}\hbar\sqrt{mk}\right)^{1/2}\,. \tag{41}$$

Produkter av uskarphetene blir dermed

$$(\Delta x)(\Delta p) = \frac{1}{2}\hbar\,. \tag{42}$$

Heisenbergs usikkerhetsrelasjon er

$$(\Delta x)(\Delta p) \geq \frac{1}{2}\hbar\,. \tag{43}$$

Denne tilstanden gir dermed den nedre grensen for denne uskarpheten.

Oppgave 3.

a) Bølgefunksjonen som tilfredstiller rand-vilkårene blir

$$\Psi(x,y,z) = sin\frac{\pi n_x}{L}\sin\frac{\pi n_y}{L}\sin\frac{\pi n_z}{L} \tag{44}$$

Innsatt gir dette egen-energien

$$E_{n_x,n_y,n_z} = E_0\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right)\,, \tag{45}$$

der

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{2mL^2}\,. \tag{46}$$

Tilstand	Energi (E_0)	Degenerasjon
111	3	2
211	6	6
221	9	6
311	11	6
222	12	2

b) Energi-nivåene og degenerasjons-graden blir

Når vi har 14 elektroner er grunntilstanden slik at 2 av disse har energien $3E_0$, 6 har energien $6E_0$ og 6 har energien $9E_0$. Total-energien er dermed $2 \cdot 3E_0 + 6 \cdot 6E_0 + 6 \cdot 9E_0 = 96E_0$.

c) Fermi-energien er maksimal-energien til en partikkel ved det absolutte null-punkt for et mange-fermion system.

Antall elektroner i systemet er

$$N = \int_0^{E_F} g(E)dE = \frac{\pi}{2E_0^{3/2}} \frac{3}{2} E_F^{3/2} \,. \tag{47}$$

Vi vet ogsåat antall partikler er $N = n_e L^3$. Dermed blir

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m}(3n_e\pi^2)^{2/3} \,, \tag{48}$$