NTNU

Institutt for fysikk

Fakultet for naturvitenskap og teknologi

Løsningsforslag til eksamen i SIF4022 Fysikk 2

Onsdag 13. august 2003

Dette løsningsforslaget er på 5 sider.

Oppgave 1.

a) Amplituden i avstand r fra en kule-bølge er

$$y(r,t) = \frac{A}{r} \exp i(kr - \omega t + \phi)\,. \tag{1}$$

Den totale effekten som brer seg gjennom et kule-skall er bevart. Arealet av et kule-skall er $4\pi r^2$. Intensiteten i avstand r fra høytaler nummer 3 er derfor

$$I_3(r) = \frac{P}{4\pi r^2} = |y_3(r,t)|^2\,. \tag{2}$$

Vi velger dermed $A = \sqrt{P/(4\pi)}$. Vi setter inn $P =$10W og $r = 1000$m og får

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2} = 0.8 \times 10^{-6}\mathrm{Wm}^{-2}\,. \tag{3}$$

Nedre hørselsgrense er $I_0 = 10^{-12}\mathrm{Wm}^{-2}$. Lydstyrken i desibel er dermed

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{0.8 \times 10^{-6}}{10^{-12}} = 59\mathrm{dB}\,. \tag{4}$$

b) Her er avstanden d mellom høytalerne mye mindre enn avstanden r. Avstands-forskjellen mellom høytaler 1 og høytaler 2, mellom høytaler 2 og høytaler 3, mellom høytaler 3 og 4, og mellom høytaler 4 og 5 er

$$\Delta r = dsin\theta\,. \tag{5}$$

Det resulterer i en relative fase-forskjell p.g.a. gang-avstanden som er

$$\alpha = k\Delta r\,. \tag{6}$$

Den resulterende amplituden fra de fem høytalerne blir dermed

$$\begin{aligned} y(r,t) &= y_1(r,t) + y_2(r,t) + y_3(r,t) + y_4(r,t) + y_5(r,t) && (7)\\ &= y_3(r,t)\left[e^{i(\phi_5-\phi_3+2\alpha)} + e^{i(\phi_4-\phi_3+\alpha)} + 1 + e^{i(\phi_2-\phi_3-\alpha)} + e^{i(\phi_1-\phi_3-2\alpha)}\right]\,. && (8)\end{aligned}$$

Intensiteten er dermed gitt ved

$$\begin{aligned} I &= |y(t)|^2 \qquad (9)\\ I &= \frac{P}{4\pi r^2} \times \\ &[5 + 2\cos(\phi_5 - \phi_1 + 4kd\sin\theta) + \\ &2\cos(\phi_5 - \phi_2 + 3kd\sin\theta) + 2\cos(\phi_4 - \phi_1 + 3kd\sin\theta) + \\ &2\cos(\phi_5 - \phi_3 + 2kd\sin\theta) + 2\cos(\phi_4 - \phi_2 + 2kd\sin\theta) + 2\cos(\phi_3 - \phi_1 + 2kd\sin\theta) + \\ &2\cos(\phi_5 - \phi_4 + kd\sin\theta) + 2\cos(\phi_4 - \phi_3 + kd\sin\theta) + \\ &2\cos(\phi_3 - \phi_2 + kd\sin\theta) + 2\cos(\phi_2 - \phi_1 + kd\sin\theta)]\,. \qquad (10) \end{aligned}$$

c) Intensiteten er størst i dette punktet når alle fasene er like, $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = \phi_5$.

d) Vi setter inn $\phi_1 = 0 = \phi_5$, $\phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = \omega t$, $\theta = 0$ og bruker $P/(4\pi r^2) = 0.8 \times 10^{-6}\mathrm{Wm}^{-2}$ og får

$$I = 0.8 \times 10^{-6}[13 + 12\cos(\omega t)] \qquad (11)$$

Oppgave 2.

a) Schrødinger-ligningen er gitt ved

$$H(p_{\mathrm{op}}, x)\psi(x,t) = E_{\mathrm{op}} = \psi(x,t)\,, \qquad (12)$$

der Hamilton-funksjonen (energi-funksjonen) er gitt ved

$$H(p_{\mathrm{op}}, x) = \frac{p_{\mathrm{op}}^2}{2m} + V(x)\,, \qquad (13)$$

og $V(x)$ er den potensielle energien. Impuls-operatoren er

$$p_{\mathrm{op}} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\,. \qquad (14)$$

og energi-operatoren er

$$E_{\mathrm{op}} = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\,, \qquad (15)$$

og innsatt gir dette Schrødinger-ligningen vi skulle vise.

b) Separasjon av variable

$$\psi(x,t) = \Psi g(t) \qquad (16)$$

gir den tidsuavhengige Schrødinger-ligningen

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\Psi(x) = E\Psi(x)\,. \qquad (17)$$

og ligningen for den tidsavhengige funksjonen $f(t)$:

$$i\hbar\frac{d}{dt}g(t) = Eg(t)\,. \qquad (18)$$

Løsningen er dermed

$$g(t) = \exp -i\frac{E}{\hbar}t\,. \tag{19}$$

Vi bestemmer så egen-energien E fra den tidsuavhengige Schrødinger-ligningen. Den første deriverte av bølgefunksjonen er

$$\frac{d}{dx}\Psi(x) = -A\frac{\pi}{a}\sin\frac{\pi x}{a}\,. \tag{20}$$

Den andre-deriverte av bølgefunksjonen er

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = -(\frac{\pi}{a})^2\Psi(x)\,. \tag{21}$$

Den tidsuavhengige Schrødinger-ligningen gir dermed

$$H(p_{\rm op}, x)\Psi(x) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\Psi(x) \tag{22}$$
$$= E\Psi(x) \tag{23}$$

Vi har dermed funnet at egen-energien er

$$E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\,. \tag{24}$$

c) Normalisering gir betingelsen

$$\int_{-a/2}^{a/2} dx|\Psi(x)|^2 = 1\,. \tag{25}$$

Vi finnner dermed

$$1 = A^2\int_{-a/2}^{a/2} dx\cos^2\frac{\pi x}{a} = A^2\frac{a}{2} \tag{26}$$

slik at

$$A = \sqrt{\frac{2}{a}}\,. \tag{27}$$

Forventnings-verdien til posisjonen er

$$\langle x\rangle = \int_{-a/2}^{a/2}\Psi^*(x)x\Psi(x)dx \tag{28}$$
$$\langle x(t)\rangle = \frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2} dxx\cos^2\frac{\pi x}{a} \tag{29}$$

Vi ser da at $\langle x\rangle = 0$ ved symmetri. Fluktuasjonene i posisjonen er gitt ved

$$\langle x^2\rangle = \int_{-a/2}^{a/2}\Psi^*(x)x^2\Psi(x)dx \tag{30}$$
$$\langle x^2\rangle = \frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2} dxx^2\cos^2\frac{\pi x}{a} \tag{31}$$
$$\langle x^2\rangle = \frac{\pi^2-6}{12\pi^2}a^2 \tag{32}$$

Dette gir

$$\Delta x = a\sqrt{\frac{\pi^2 - 6}{12\pi^2}}\,. \tag{33}$$

d) Impuls-operatoren er $p_{\text{op}} = (\hbar/i)\partial/\partial x$. Forventningsverdien av impuls-operatoren er

$$\langle p \rangle = \int_{-a/2}^{a/2} dx \psi^*(x,t) p_{\text{op}} \psi(x,t) = 0\,. \tag{34}$$

Fluktuasjonene er gitt ved

$$\langle p^2 \rangle = -\hbar^2 \int_{-a/2}^{a/2} dx \Psi(x) \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) \tag{35}$$

$$\langle p^2 \rangle = (\frac{\hbar\pi}{a})^2 \tag{36}$$

Dette gir

$$\Delta p = \frac{\hbar\pi}{a} \tag{37}$$

Produkter av uskarphetene blir dermed

$$(\Delta x)(\Delta p) = \sqrt{\frac{\pi^2 - 6}{12}}\hbar \approx 0.57\hbar\,. \tag{38}$$

Heisenbergs usikkerhetsrelasjon er

$$(\Delta x)(\Delta p) \geq \frac{1}{2}\hbar\,. \tag{39}$$

Denne tilstanden er derfor i overensstemmelse med Heisenbergs usikkerhetsrelasjon.

Oppgave 3.

a) Bølgefunksjonen som tilfredstiller rand-vilkårene blir

$$\Psi(x,y,z) = sin\frac{\pi n_x}{L} \sin\frac{\pi n_y}{L} \tag{40}$$

Innsatt gir dette egen-energien

$$E_{n_x,n_y,n_z} = E_0\left(n_x^2 + n_y^2\right)\,, \tag{41}$$

der

$$E_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\,. \tag{42}$$

b) Energi-nivåene og degenerasjons-graden blir som vist i tabellen nedenfor.

Når vi har 16 elektroner er grunntilstanden slik at 2 av disse har energien $2E_0$, 4 har energien $5E_0$ 2 har energien $8E_0$, 4 har energien $10E_0$, og 4 har energien E_0. Total-energien er dermed $2 \cdot 2E_0 + 4 \cdot 5E_0 + 2 \cdot 8E_0 + 4 \cdot 10E_0 + 4 \cdot 13E_0 = 132E_0$.

Tilstand	Energi (E_0)	Degenerasjon
11	2	2
21	5	4
22	8	2
31	10	4
32	13	4
41	17	2

c) Fermi-energien er maksimal-energien til en partikkel ved det absolutte null-punkt for et mange-fermion system.

Antall elektroner i systemet er

$$N = \int_0^{E_F} g(E)dE = \frac{\pi}{2E_0^{3/2}} \frac{3}{2} E_F^{3/2} \,. \tag{43}$$

Vi vet ogsåat antall partikler er $N = n_e L^3$. Dermed blir

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m}(3n_e\pi^2)^{2/3} \,, \tag{44}$$