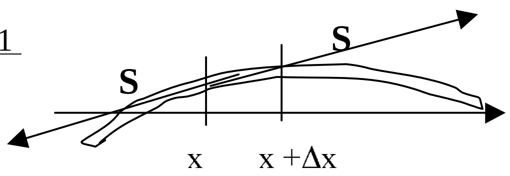
Eksamen i SIF4022 Fysikk 2
7. desember 1999

LØYSINGAR

Oppgave 1

a)



Masse $\mu \cdot \Delta x$ Akselerasjon $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

Kraft opp:

$$S \cdot \sin\alpha(x+\Delta x) - S\sin\alpha(x)$$
$$= S(\alpha(x+\Delta x)) = S\left(\frac{dy}{dx}(x+\Delta x) - \frac{dy}{dx}(x)\right)$$
$$= S \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \Delta x$$

Newtons 2. lov

$$S \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \Delta x = \mu \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

gir

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{S}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

som er bølgjelikninga, av form

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ med v = bølgjefart som krev

$$\underline{\underline{v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}}}$$

b) $$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi = 0$$

Harmonisk planbølgje

$$\psi = A\,e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \phi)}$$
$$= A\,e^{i(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z) + \phi)}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\,\omega^2\psi$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\,ik_x\cdot\psi$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x} = -\,k_x^2\cdot\psi, \text{tils varande for } \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \text{ og } \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$
$$-\underbrace{\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^z\right)}_{k^2}\psi + \frac{1}{v^2}\,\omega^2\psi = 0$$
$$\underline{\underline{)\text{: Stemmer når } \omega = k\cdot v}}$$

Harmonisk kulebølgje

$$\psi = \frac{A}{r}\,e^{i(\omega t - kr + \phi)}$$

Vi brukar kulekoordinatar (Rottmann)

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)$$

Her avheng ψ berre av r, ikkje av polarvinklane φ og θ):

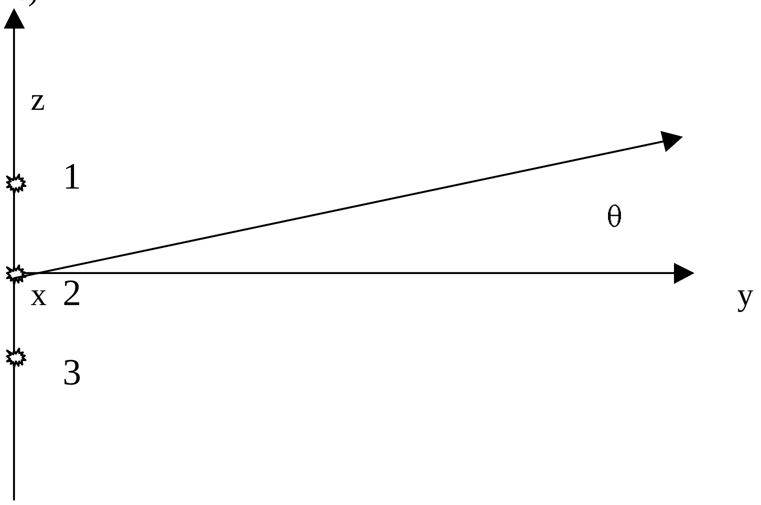
$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = A\cdot\frac{\left(r(-ik)\cdot e^{i(\omega t - kr + \phi)} - e^{i(\omega t - kr - \phi)}\right)}{r^2}$$
$$= (-ik)\psi - \psi / r$$

$$r^2\frac{\partial\psi}{\partial r} = -ikr^2\psi - r\psi$$
$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = -ik\left(2r\psi + r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) - \psi - r\frac{\partial\psi}{\partial r}$$
$$= -ik\left(2r\psi - r^2 ik\psi - r^2\frac{\psi}{r}\right) - \psi + ikr\psi + \psi$$
$$= -ik\left(2r\psi - r\psi - r\psi\right) - k^2\psi = -\,k^2\psi$$

$$)\text{:}\quad -\,k^2\psi - \frac{1}{v^2}(-\omega^2)\psi = 0$$

ok når $\omega = k\cdot v$!

c)

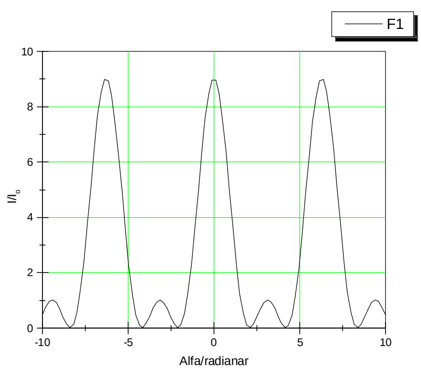


Intensiteten vil ikkje avhenge av retninga φ i x-y-planet.

For retningar ξ med z-aksen (θ med xy-planet der ξ + θ = π/2):

$$\psi_{res} = \psi_1(r_1) + \psi_2(r_2) + \psi_3(r_3)$$
$$= Ae^{i\omega t}\left(\frac{1}{r_1}e^{-ikr_1} + \frac{1}{r_2}e^{-ikr_2} + \frac{1}{r_3}e^{-ikr_3}\right)$$
$$= \frac{A}{r}e^{i(\omega t - kr_2)}\left(e^{-ik(r_1-r_2)} + 1 + e^{-ih(r_3-r_2)}\right)$$
$$= \frac{A}{r}e^{i(\omega t - kr_2)}\left(1 + 2\cos\alpha\right)$$
$$der\ \alpha = k\cdot\Delta r = k\cdot d\sin\theta$$

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{r}^2}(1+2\cos\alpha)^2$$



Det blir sterke og svake striper (i forholdet 9 : 1) parallelt med x-y planet med null-intensitet imellom.

c) Ein finn at intensiteten er

$$I = I_0 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right)^2$$

der $\alpha = \frac{\pi d}{\lambda} \sin\theta$

der d = 2 · 10^{-3} mm = 2000 nm. λ = 589 nm

Der blir maksima når $n \cdot \lambda = d \sin\theta$

$\sin\theta = n\frac{\lambda}{d}$; n = heile tall

Toppane har ei breidd på $\frac{\pi}{N} = \frac{180}{500} = 0{,}36^o$ der N er totalt antall spalter.

Dei to bølgjelengdene er oppløyste frå kvarandre når

$$|\theta_1 - \theta_2| \geq \frac{\pi}{N}$$

n = 0 $\theta_1 = \theta_2 = 0$

n = 1 $\sin\theta_1 = \frac{588}{2000}$; $\theta_1 = 17.098$

$\sin\theta_2 = \frac{599}{2000}$; $\theta_2 = 17.428$ $\Delta\theta = 0.33^o$

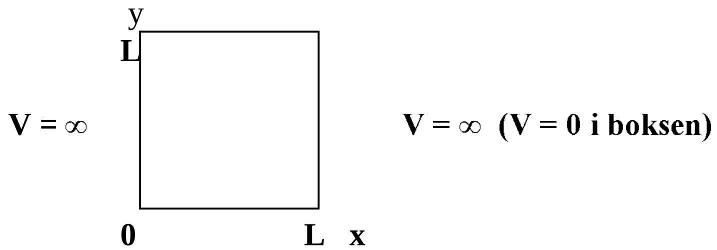
n = 2 $\theta_1 = 36.015^o$ $\Delta\theta = 0.78^o$

$\theta_2 = 36.798^o$ $> 0.36^o$

Retninga er rundt 36.4^o, ein topp på kvar side, med ulike bølgjelengder.

Oppgave 2

a) Ser på eit todimensjonalt tilfelle:



Schrödingerlikninga

$$\left[-\frac{\eta^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+(U(x,y)-E)\right]\psi=0$$

der U(x,y) = 0 for 0 < x < L og 0 < y < L.
= ∞ elles

Separabel: $\psi = \psi_1(x)\cdot\psi_2(y)$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\psi_2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}\;;\;\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\psi_1\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}$$

<u>I boksen:</u>

$$-\frac{\eta^2}{2m}\left(\psi_2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\psi_1\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}\right)-E\cdot\psi_1\psi_2=0$$

eller

$$-\frac{\eta^2}{2m}\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}=E+\frac{\eta^2}{2m}\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}$$
$$=\text{konstant}=C$$

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}=C'\cdot\psi_1$$

Av form $\psi_1 = A(e^{ikx} \pm e^{-ikx})$

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}=-k^2\psi_1 \qquad): \qquad C'=k^2=\frac{2m}{\eta^2}C$$

$$): \quad \underline{C=\frac{\eta^2k^2}{2m}}$$

Grensekrav

$\psi(0) = \psi(L) = 0$ krev - teiknet.

$e^{ikL} = e^{-ikL}$): $e^{2ikL} = 1$

$2kL = 2\pi\cdot n_1$

$k = \pi/L\cdot n_1$ $n_1 = 1, 2, 3, \cdots$

$$C=\frac{\eta^2\pi^2}{2mL^2}n_1^2$$

a) $$\frac{\eta^2}{2m}\frac{1}{\psi_2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}=C-E=C''$$

som på same vis krev

$\psi_2 = B(e^{iky} - e^{-iky})$

og

$$C'' = -\frac{\eta^2}{2m}\frac{\pi^2}{L^2}\cdot n_2^2 \qquad n_2 = 1, 2, 3\cdots$$

b) Læreboka

c) $$\underline{\underline{E}} = C + C'' = \underline{\underline{\frac{\eta^2}{2m}\frac{\pi^2}{L^2}}}(n_1^2 + n_2^2) = \underline{\underline{E_0(n_1^2 + n_2^2)}}$$

For tre dimensjonar; generalisering:

$$E = E_0(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$$

$$E_0 = \frac{\eta^2}{2m}\frac{\pi^2}{L^2} = 3.73\,eV$$

$$E_1 = 3\cdot E_0 = \underline{\underline{11.19\,eV}}$$

E_2 med $n_1 = 1 \quad n_2 = 2 \quad n_3 = 2$

$$E_2 = 6\cdot E_0 = \underline{\underline{22.38\,eV}} \quad \text{(eksitert).}$$

Fermienergien $E_F = \frac{\eta^2}{2m}\underbrace{(3\pi^2 n_e)^{2/3}}_{9.57\cdot 10^{18}}$

$n_e = 1/10^{-9\cdot 3}\ m^3 = 10^{27}\ m^{-3}$

$E_F = 5.791 \cdot 10^{-68} \cdot 10^{31} \cdot 10^{18}\ J = \underline{\underline{3.615\,eV}}$

Desse verdiane er nokså ulike. Energi for partikkel i liten boks er større enn i stor boks.

d) Kvantemekanisk er det endeleg sannsyn for at ein partikkel kan gå gjennom ein energibarriere som har energi større enn partikkelenergien.

<u>Oppgave 3.</u>

a) Elektronstrålar har bølgjekarakter etter de Broglies formel $\lambda = h/(mv)$ der v er farten.

Elektronet får ein kinetisk energi $\frac{1}{2}mv^2 = eV$ ved akselerasjonen som gir

$$mv=(2meV)^{\frac{1}{2}}$$
$$=(2\cdot 9.11\cdot 10^{-31}\cdot 1.6\cdot 10^{-19}\cdot 10^{2})^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{kg\,m/s}$$
$$=5.40\cdot 10^{-24}\ \mathrm{kg\,m/s.}$$

$\lambda = 6.63 \cdot 10^{-34}$ J · s/m V
$= 1.22 \cdot 10^{-10}$ m = <u>0.122 nm</u>

Braggs lov $2\, d \sin\theta = n\lambda$

$$\sin\theta = \frac{n\lambda}{2d} = n\cdot 0.339$$

$\theta_1 = 0$ (rett fram)	
$\theta_2 = 19.82^o$	Avbøying $2\theta_1 = 39.63^o$
$\theta_2 = 42.69^o$	Avbøying $2\theta_2 = 85.38^o$
$\sin\theta_3 > 1$	ikkje mulig

b) For n = 1 (grunntilstanden) er bølgjefunksjonen kulesymmetrisk, og har form
$\psi(r) = N_1\, e^{-pr}$
Vi kallar den for eit 1s-orbital.
Det er plass til to elektron, spinn s = $\pm \frac{1}{2}$.
Kvantetallet for banespinn $\lambda = 0$, og det magnetiske kvantetallet er $\mu_\lambda = 0$.

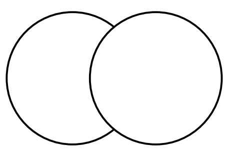
For n = 2 kan λ ta verdiane $\lambda = 0,1$. For $\lambda = 0$ er orbitalen igjen kulesymmetrisk, kalla 2s, med plass til to elektron.
$\psi(r) = N_2 \cdot F(r) \cdot e^{-p2r}$

For $\lambda = 1$ er det tre orbitalar, kalla 2p, $p_x\, p_y\, p_z$, retta langs tre ortogonale retningar, svarande til m_λ = -1, 0 og +1.

Dei er av form

$x \cdot e^{-p2r}$, $y e^{-p2r}$ og $z e^{-p2r}$

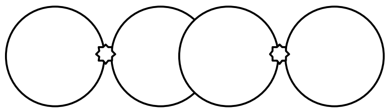
Når hydrogenet dannar kovalent binding til hydrogen-molekylet, er det 1s-orbitalane som overlappar og dannar ei stabil binding ved at der er elektron-fordeling i rommet mellom atoma.



Andre atom har elektron-konfigurasjon som H-atomet, men har fleire elektron f.eks. karbon C har 6

$$1s^2 2s^2 2p^2$$

p-orbitalane er veleigna til å danne sterke bindingar, fordi dei er <u>retta</u> i bestemte retningar.



Karbon kovalente bindingar er blant dei sterkaste i naturen.

c)

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) \cdot e^{i\omega t}$$

$$= A \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(t-t_0)^2} e^{i\omega t} dt$$

Ta $T = t - t_0 \quad dt = dT$

$$F(\omega) = A \cdot e^{i\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-aT^2} e^{i\omega T} dT$$

Integralet finst i Rottmann

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

Halvverdi Δt av $f(t)$: $\qquad \Delta t = 2 \sqrt{\lambda n\, 2/a}$

Halvverdi $\Delta\omega$ av $F(\omega)$ $\qquad \Delta\omega \quad 2 \sqrt{4a \ln 2}$

$$\underline{\underline{\Delta\omega \cdot \Delta t}} = 8 \ln 2 = \underline{\underline{5.55}} \leq 2\pi$$

d)

Ståande bølgjer

$L = \frac{\lambda}{2}$ $\qquad$): $\qquad f = v/\lambda = \frac{v}{2L}$

$$f_1 = \frac{5300}{2} s^{-1} = \underline{2650\,Hz}$$

$$f_2 = \frac{5300}{2 \cdot 0.99} s^{-1} = \underline{2677\,Hz}$$

Ein vil observere desse to frekvensane men også svevinga mellom dei, med svevefrekvens 27 Hz.

e)

Ei-spalte-diffraksjon

$I = I_0\ (\sin\alpha/\alpha)^2$

$I = 0$ når $\alpha = n\pi$): $\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda} = n\pi$

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{d} \cdot n$$

Første mørke punkt når n = 1

$\sin\theta = \frac{\lambda}{d}$ der $\theta = 10.2^o$

): $d = \frac{\lambda}{\sin\theta} = \underline{\underline{2.88\mu m}}$

e) Dele spalta inn i N smådelar, med opning $d' = \frac{d}{N}$. Det gir mangebølgjeinterferens

$I = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)} \right)^2$ med $\phi = \frac{2\pi d' \sin\theta}{\lambda} = 2\pi d \sin\phi/(\lambda \cdot N)$. Når $N \to \infty$, $\phi \to 0$ og

$\frac{N\phi}{2} = 2\pi d \sin\theta/\lambda$): $\underline{\underline{I = NI_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2}}$ idet

$$\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \to \sin(\pi d \sin\theta/\lambda \cdot N) \to \pi d \sin\theta/\lambda \cdot N$$

der $\alpha = \pi\ d\ \sin\theta/\lambda$.

I_0 er intensitet frå kvar enkel tenkt opning.

$NI_0 = I_{tot}^0$ = intensitet rett fram (for $\theta = 0$, $\alpha = 0$)