NTNU

Institutt for fysikk

Fakultet for naturvitenskap og teknologi

Løsningsforslag til eksamen i TFY4170 Fysikk 2

Tirsdag 9. desember 2003

Dette løsningsforslaget er på 7 sider.

Oppgave 1.

a) Amplituden i avstand r fra en kule-bølge er

$$y(r,t) = \frac{A}{r} \exp i(kr - \omega t + \phi)\,. \tag{1}$$

Den totale effekten som brer seg gjennom et kule-skall er bevart. Arealet av et kule-skall er $4\pi r^2$. Intensiteten i avstand r fra høytaler nummer 1 er derfor

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2} = |y(r,t)|^2\,. \tag{2}$$

Vi velger dermed $A = \sqrt{P/(4\pi)}$. Vi setter inn $P = $10W og $r = 1000$m og får

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2} = 0.8 \times 10^{-6}\text{Wm}^{-2}\,. \tag{3}$$

Nedre hørselsgrense er $I_0 = 10^{-12}\text{Wm}^{-2}$. Lydstyrken i desibel er dermed

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{0.8 \times 10^{-6}}{10^{-12}} = 59\text{dB}\,. \tag{4}$$

b) Her er avstanden d mellom høytalerne mye mindre enn avstanden r. Avstandsforskjellen mellom høytaler 1 og høytaler 3 er gitt ved

$$\Delta r_{31} = r_3 - r_1 = -\Delta r_{31} = d \sin\theta\,. \tag{5}$$

Avstands-forskjellen mellom høytaler 1 og høytaler 2 er gitt ved

$$\Delta r_{21} = r_2 - r_1 = -\Delta r_{12} = d \cos\theta\,. \tag{6}$$

Det resulterer i en relative fase-forskjell p.g.a. gang-avstanden som er

$$\begin{aligned} \alpha_{31} &= k\Delta r_{31} = kd\sin\theta && (7)\\ \alpha_{21} &= k\Delta r_{21} = kd\cos\theta && (8)\\ & && (9) \end{aligned}$$

Den resulterende amplituden fra de tre høytalerne blir dermed

$$\begin{aligned} y(r,t) &= y_1(r,t) + y_2(r,t) + y_3(r,t) &(10)\\ &= y_1(r,t)\left[1 + e^{i(\phi_2-\phi_1+\alpha_{21})} + e^{i(\phi_3-\phi_1+\alpha_{31})}\right]. &(11)\end{aligned}$$

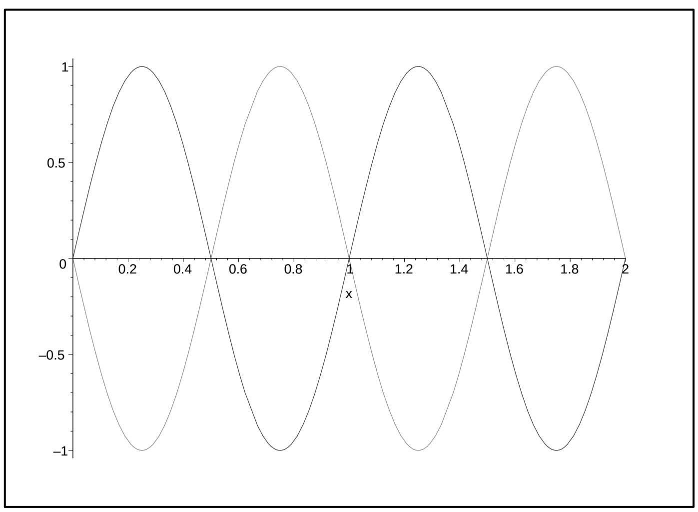
Intensiteten er dermed gitt ved

$$\begin{aligned} I &= |y(t)|^2 &(12)\\ I &= \frac{P}{4\pi r^2}\times \\ &[3 + 2\cos(\phi_2-\phi_1+kd\cos\theta) + \\ &2\cos(\phi_3-\phi_1+kd\sin\theta) + 2\cos(\phi_3-\phi_2+kd(\sin\theta-\cos\theta))]. &(13)\end{aligned}$$

Vi bruker resultatet fra ligning (3) og finner

$$\begin{aligned} I &= 0.8\times 10^{-6}\mathrm{Wm}^{-2}\times \\ &[3 + 2\cos(\phi_2-\phi_1+kd\cos\theta) + \\ &2\cos(\phi_3-\phi_1+kd\sin\theta) + 2\cos(\phi_3-\phi_2+kd(\sin\theta-\cos\theta))]. &(14)\end{aligned}$$

c) Stående bølger har vi når bølgene ikke forflytter seg, men står og svinger på samme sted. Punktene der bølgeutslaget er null (knuter) står hele tiden i ro. To bølger med



samme utslag som går i motsatt retning er gitt ved

$$y_1 = A\exp i\,(\omega t - kx + \phi_1), \tag{15}$$
$$y_2 = A\exp i\,(\omega t + kx + \phi_2). \tag{16}$$

Den totale bølgen blir dermed

$$y = y_1 + y_2 = 2A\exp i\left(\omega t + \frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)\cos\left(kx - \frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right). \tag{17}$$

Vi ser at resultantbølgen er separert i en tidsavhengig og en romavhengig faktor. Knutene er bestemt ved

$$\cos\left[kx - \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right] = 0\,, \tag{18}$$

slik at

$$x_n = \frac{\lambda}{2}\left[(n + \frac{1}{2}) + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2\pi}\right]\,. \tag{19}$$

d) Bølgeligningen i tre dimensjoner er

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi(x,y,z,t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(x,y,z,t)\,, \tag{20}$$

der v er bølgefarten.

En harmonisk planbølge er gitt ved

$$\begin{aligned}\Psi &= A\exp i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \psi\right) & (21)\\ &= A\exp i\left(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \psi\right). & (22)\end{aligned}$$

Vi finner

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -\omega^2\Psi \tag{23}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = -k_x^2\Psi \tag{24}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = -k_z^2\Psi \tag{25}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = -k_y^2\Psi\,. \tag{26}$$

Dermed er

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi(x,y,z,t) = -k^2\Psi(x,y,z,t)\,, \tag{27}$$

der $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ slik at planbølgen er en løsning av bølgeligningen når $\omega = kv$.

Tilsvarende er en harmonisk kulebølge gitt ved

$$\Psi = \frac{A}{r}\exp i\left(\omega t - kr + \psi\right). \tag{28}$$

Vi bruker kule-koordinater (f.eks. Rottmann)

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)\,. \tag{29}$$

I vårt tilfelle avhenger bølgefunksjonen bare av r, og ikke av polarvinklene θ og ϕ. Vi finner dermed

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)\,. \tag{30}$$

Vi bruker

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r} = -ik\Psi - \frac{\Psi}{r} \tag{31}$$

og dermed er

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) &= \frac{\partial}{\partial r}\left(-ikr^2\Psi - r\Psi\right) &(32)\\
&= -ik2r\Psi - \Psi + \left(-ikr^2 - r\right)\frac{\partial\Psi}{\partial r} &(33)\\
&= -\left(2ikr+1\right)\Psi + \left(ikr+1\right)\left(ikr+1\right)\Psi &(34)\\
&= -k^2r^2\Psi\,. &(35)
\end{aligned}$$

Vi får

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) = -k^2\Psi\,, \tag{36}$$

slik at bølgeligningen er oppfylt når $\omega = kv$.

Oppgave 2.

a) Schrødinger-ligningen er gitt ved

$$H(p_{\mathrm{op}}, x)\psi(x,t) = E_{\mathrm{op}}\psi(x,t)\,. \tag{37}$$

Impuls-operatoren er

$$p_{\mathrm{op}} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\,. \tag{38}$$

og energi-operatoren er

$$E_{\mathrm{op}} = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\,, \tag{39}$$

og innsatt gir dette Schrødinger-ligningen vi skulle vise.

b) Separasjon av variable

$$\psi(x,t) = \Psi g(t) \tag{40}$$

gir den tidsuavhengige Schrødinger-ligningen

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\Psi(x) = E\Psi(x)\,. \tag{41}$$

og ligningen for den tidsavhengige funksjonen $f(t)$:

$$i\hbar\frac{d}{dt}g(t) = Eg(t)\,. \tag{42}$$

Løsningen er dermed

$$g(t) = \exp -i\frac{E}{\hbar}t\,. \tag{43}$$

c) Vi bestemmer så egen-energien E fra den tidsuavhengige Schrødinger-ligningen. Den første deriverte av bølgefunksjonen er

$$\frac{d}{dx}\Psi(x) = A\frac{n\pi}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}\,. \tag{44}$$

Den andre-deriverte av bølgefunksjonen er

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = -(\frac{n\pi}{a})^2\Psi(x)\,. \tag{45}$$

Den tidsuavhengige Schrødinger-ligningen gir dermed

$$\begin{aligned} H(p_{\mathrm{op}}, x)\Psi(x) &= \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2}\Psi(x) && (46)\\ &= E\Psi(x) && (47) \end{aligned}$$

Vi har dermed funnet at egen-energien er

$$E = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2}\,. \tag{48}$$

For stasjonære tilstander er det ingen uskarphet i egen-energien.

d) Vi ser på tilstanden $n = 1$.

Forventnings-verdien til posisjonen er

$$\begin{aligned} \langle x\rangle &= \int_{-a/2}^{a/2}\Psi^*(x)x\Psi(x)dx && (49)\\ \langle x\rangle &= \frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a}x\cos^2\frac{\pi x}{a}dx && (50)\\ & && (51) \end{aligned}$$

Vi ser da at $\langle x\rangle = 0$ ved symmetri. Fluktuasjonene i posisjonen er gitt ved

$$\begin{aligned} \langle x^2\rangle &= \int_{-a/2}^{a/2}\Psi^*(x)x^2\Psi(x)dx && (52)\\ \langle x^2\rangle &= \frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2}x^2\cos^2\frac{\pi x}{a}dx && (53)\\ \langle x^2\rangle &= a^2\frac{\pi^2-6}{12\pi^2}\,. && (54) \end{aligned}$$

Dette gir

$$\Delta x = a\sqrt{\frac{\pi^2-6}{12\pi^2}}\,. \tag{55}$$

Oppgave 3.

a) Kvantetallene er n, l, m_l og m_s:

n**:** $n = 1, 2, 3 \ldots$ kalles hovedkvantallet. Dette kvantetallet bestemmer total-energien til atomet.

l**:** l kan ta alle verdier slik at $l < n$. Det betyr at $n = 0, 1, \ldots, (n-1)$. l kalles banespinn-kvantetallet fordi det bestemmer dreieimpulsen til atomet.

m_l**:** m_l kalles det magnetiske kvantetallet. Oppførselen til atomet i et magnet-felt er avhengig av dette kvante-tallet. Det bestemmer Zeemann-energien. Verdien til m_l er også begrenset slik at $m_l < l$ dvs. $m_l = -l, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, l$.

m_s**:** m_s bestemmer atomets spinn. Dette kvantetallet har to mulige verdier, $m_s = 1/2$ eller $m_s = -1/2$.

b) Med degenerasjon menes at flere forskjellige sett med kvante-tall gir den samme energien.

Fermioner kan ikke befinner seg i samme kvante-tilstand. Energi-nivåene og degenerasjonsgraden blir

Tilstand	Energi (E_0)	Degenerasjon
111	3	1
211	4	3
221,311	5	6
222,411,321	6	10

Ved null temperatur er de laveste energi-nivåene fylt. Vi ser dermed at vi fyller de tre nederste energi-nivåene med 10 partikler. Total-energien blir

$$E = E_0\,(1 \times 3 + 3 \times 4 + 6 \times 5) = 45E_0\,. \tag{56}$$

Bosoner kan være i samme kvantetilstand. Ved null temperatur vil da alle partiklene befinne seg i den samme laveste energi-tilstanden, $E_{1,1,1} = 3E_0$. Total-energien er da $10 \times E_{1,1,1} = 30E_0$.

c) De viktigste bindingstypene klassifiseres som ionisk, kovalent, metallisk, polar og van der Waalsk bind:

Ionisk I ionisk binding overføres et løst bundet elektron (f.eks. fra gruppe I, alkali-atomene) til et atom med stor elektron affinitet (f.eks. gruppe VII). Energien til to-atom systemet minskes ved å f.eks. forflytte et elektron fra Na-atomet til Cl-atomet.

Kovalent Kovalent binding oppstår når atomene deler elektroner for å skape fulle skall. Det enkleste tilfelle er H_2 molekylet. I dette molekylet blir 1s elektronene til hvert atom delt mellom de to atomene slik at de danner et full $1s^2$ skall.

Metallisk Dersom et krystall blir dannet av atomer hvor et eller flere elektroner er bare løst knyttet til atomet kan en metallisk binding skapes. Disse systemene er slik at de positive atom-kjernene plasserer seg i et gitter og elektronene beveger seg fritt i hele metallet. Det er disse frie elektronene som skaper bindingen mellom de positive atom-kjernene.

Polar I noen molekyler, polare molekyler, skjer delingen av elektroner slik at det er en ladningsforkyvning fra ett atom til et annet atom. Vann, H_2O er et eksempel på dette.

van der Waals Gasser med nøytrale lite reaktive atomer kan også ha en svak vekselvirkning med hverandre. Det gjennomsnlittlige dipol-momentet til atomene er like null. Derimot kan fluktuasjonene i ladningsfordelingen skape et elektrisk felt som danner en tiltrekkende kraft mellom atomene. Denne tiltrekkende kraften kan skape van der Waals bindinger mellom atomene. Denne tiltrekningen er veldig svak og virker derfor bare mellom atomer som ikke danner kovalente eller ioniske bindinger.

d) **Isolator** En isolator er en dårlig leder av elektrisk strøm. I en isolator ligger Fermi-energien i et område der tettheten av tilstander er svært liten og dermed blir ledningsevnen svært liten fordi det er få elektroner som kan forflytte seg.

Leder En leder er en god leder av elektrisk strøm. I en leder ligger Fermi-energien i et område der tettheten av tilstander er stor og dermed blir ledningsevnen god fordi det er mange elektroner som kan forflytte seg.

Halvleder En halvleder er en mellomting mellom en leder og en isolator der Fermi-energien ligger i et gap mellom et fylt og et ikke fylt energi-bånd, men gapet er ikke like stort som for en isolator og halvlederen kan lede strøm ved høyere temperaturer eller hvis halvlederen dopes med urenheter.

Superleder En superleder har null motstand ved lave temperaturer og den har en Meissner effekt som betyr at et eksternt magnetfelt ikke kan trenge inn i superlederen.