NTNU

**Institutt for fysikk**

**Fakultet for naturvitenskap og teknologi**

# Løsningsforslag til eksamen i TFY4170 Fysikk 2

12. august 2004

Dette løsningsforslaget er på 7 sider.

**Oppgave 1. Interferens**

**a)** Amplituden i avstand $r$ fra en kule-bølge er

$$y(r,t) = \frac{A}{r} \exp i(kr - \omega t + \phi)\,. \tag{1}$$

Den totale effekten som brer seg gjennom et kule-skall er bevart. Arealet av et kule-skall er $4\pi r^2$. Intensiteten i avstand $r$ fra høytaler nummer 2 er derfor

$$I_2(r) = \frac{P_2}{4\pi r^2} = |y_2(r,t)|^2\,. \tag{2}$$

Vi velger dermed $A_2 = \sqrt{P_2/(4\pi)}$. Vi setter inn $P_2$ =1W og $r = 100$m og får

$$I(r) = \frac{P_2}{4\pi r^2} = 0.8 \times 10^{-5}\mathrm{Wm}^{-2}\,. \tag{3}$$

Nedre hørselsgrense er $I_0 = 10^{-12}\mathrm{Wm}^{-2}$. Lydstyrken i desibel er dermed

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{0.8 \times 10^{-5}}{10^{-12}} = 69\mathrm{dB}\,. \tag{4}$$

**b)** Her er avstanden $d$ mellom høytalerne mye mindre enn avstanden $r$. Avstands-forskjellen mellom høytaler 1 og høytaler 2 og mellom høytaler 2 og høytaler 3 er

$$\Delta r = d sin\theta\,. \tag{5}$$

Det resulterer i en relative fase-forskjell p.g.a. gang-avstanden som er

$$\alpha = k\Delta r\,. \tag{6}$$

Den resulterende amplituden fra de tre høytalerne blir dermed

$$\begin{aligned} y(r,t) &= y_1(r,t) + y_2(r,t) + y_3(r,t) && (7)\\ &= y_2(r,t)\left[1 + \sqrt{\frac{P_3}{P_2}} e^{i(\phi_3 - \phi_2 + \alpha)} + \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} e^{i(\phi_1 - \phi_2 - \alpha)}\right] && (8)\\ &= \sqrt{\frac{P_2}{4\pi}}\frac{1}{r}\left[1 + 4e^{i(\phi_3 - \phi_2 + kd\sin\theta)} + \frac{1}{4}e^{i(\phi_1 - \phi_2 - kd\sin\theta)}\right]\,. && (9) \end{aligned}$$

Intensiteten er dermed gitt ved

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{P_2}{4\pi r^2}\left|1+4e^{i(\phi_3-\phi_2+kd\sin\theta)}+\frac{1}{4}e^{i(\phi_1-\phi_2-kd\sin\theta)}\right|^2 &(10)\\
I &= \frac{P_2}{4\pi r^2}\times\\
&[\frac{273}{16}+8\cos(\phi_3-\phi_2+kd\sin\theta)+\\
&\frac{1}{2}\cos(\phi_1-\phi_2-kd\sin\theta)+2\cos(\phi_3-\phi_1+2kd\sin\theta)]\,. &(11)
\end{aligned}
$$

Vi setter nå fasene like hverandre. Intensiteten forenkles dermed til

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{P_2}{4\pi r^2}[\frac{273}{16}+\frac{17}{2}\cos(kd\sin\theta)+2\cos(2kd\sin\theta)] &(12)\\
I &= 0.8\times10^{-5}\mathrm{Wm}^{-2}[\frac{273}{16}+\frac{17}{2}\cos(kd\sin\theta)+2\cos(2kd\sin\theta)]\,. &(13)
\end{aligned}
$$

Vi finner dessuten

$$kd=\frac{2\pi f}{v}d=\frac{2\pi 440}{340}\times1.0=8.1\,. \qquad (14)$$

Maksima/minima opptrer når $\partial I/(\partial\theta)=0$. Derivasjon gir et maksima for $\theta=0$ og $\theta=\pi$ og når

$$\sin(kd\sin\theta)\left[1+\frac{16}{17}\cos(kd\sin\theta)\right]=0 \qquad (15)$$

det vil si når

$$kd\sin\theta=n\pi\,, \qquad (16)$$

der $n$ er et heltall. Insetting gir når $n$ er et like hel-tall maksimums-intensiteten

$$I=0.8\times10^{-5}\mathrm{Wm}^{-2}[\frac{441}{16}]\,. \qquad (17)$$

Maksimums-retningene er

$$\theta_{\max}=0\text{ grader, }50\text{ grader, }130\text{ grader, }180\text{ grader, }230\text{ grader og }310\text{ grader}\,. \qquad (18)$$

Minimums-intensiteten finnes når $n$ er et odde tall:

$$I=0.8\times10^{-5}\mathrm{Wm}^{-2}[\frac{377}{16}]\,. \qquad (19)$$

De lokale minimums-retningene er

$$\theta_{\min}=\ 23\text{ grader, }90\text{ grader, }157\text{ grader, }203\text{ grader, }270\text{ grader og }337\text{ grader}\,. \qquad (20)$$

**c)** Intensiteten er størst i dette punktet når alle fasene er like, $\phi_1=\phi_2=\phi_3$.

**d)** Intensiteten er gitt ved

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{P_2}{4\pi r^2}\times\\
&[\frac{273}{16}+8\cos(\phi_3-\phi_2+kd\sin\theta)+\\
&\frac{1}{2}\cos(\phi_1-\phi_2-kd\sin\theta)+2\cos(\phi_3-\phi_1+2kd\sin\theta)]\,. &(21)
\end{aligned}
$$

Vi setter inn $\phi_1 = 0 = \phi_3$, $\theta = \pi/2$ og bruker $P_2/(4\pi r^2) = 3.2 \times 10^{-5}\mathrm{Wm}^{-2}$ får

$$\begin{aligned} I &= 3.2 \times 10^{-5}[\frac{305}{16} + \frac{17}{2}\cos(\omega t)] \\ I &= [6.1 + 2.7\cos\omega t] \times 10^{-4}\mathrm{Wm}^{-2} \end{aligned} \tag{22}$$

**Oppgave 2. Elektromagnetiske bølger**

Maxwells' ligninger for det elektriske feltet, $\vec{E}(\vec{r},t)$, og det magnetisk feltet, $\vec{B}(\vec{r},t)$, i posisjonen $\vec{r}$ ved tiden $t$ i tomt rom er

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{aligned}$$

der $\varepsilon_0$ er dielektrisitetskonstanten og $\mu_0$ er den magnetiske permeabiliteten i vakuum.

**a)** Vi operer med $\vec{\nabla}\times$ på den tredje av Maxwell's ligninger:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\right).$$

Vi bruker

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{E}$$

som ved hjelp av den første av Maxwell's ligninger, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, blir

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = -\vec{\nabla}^2 \vec{E}.$$

Tilsvarende kan vi ved å bruke den fjerde Maxwell ligningen finne

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\right) &= -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \times \vec{B} \\ &= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Dermed finner vi

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}.$$

Tilsvarende kan vi finne ved å operere med $\vec{\nabla}\times$ på den fjerde av Maxwell's ligninger:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) &= \varepsilon_0 \mu_0 \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right) \\ \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \end{aligned}$$

og ved hjelp av $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ har vi

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}$$

som vi skulle vise.

Bølgehastigheten kan finnes ved å se på en planbølge som forplanter seg i en retning, f.eks. $x$-retningen.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t).$$

Innsatt i bølgeligningen gir dette

$$k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2,$$

slik at bølgehastigheten er

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

**b)** Det elektriske feltet er

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi\right),$$

der $\vec{E}_0$ er amplituden, $\vec{k}$ er bølgevektoren, $\vec{r}$ er posisjonen, $\omega$ er vinkelfrekvensen, $t$ er tiden og $\varphi$ er en fasekonstant.

1. Forholdet mellom amplituden og bølgevektoren: Maxwell's første ligning ovenfor gir

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, \\ -\vec{k} \cdot \vec{E}_0 \sin\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi\right) &= 0. \end{aligned}$$

   Dette betyr at bølgevektoren og amplituden må være ortogonale. Det elektriske feltet er transversalt forplantningsretningen:

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0.$$

2. Forholdet mellom bølgevektoren og vinkelfrekvensen: En lignende beregning som ovenfor gir forholdet mellom bølgevektoren og vinkelfrekvensen:

$$v = \frac{\omega}{\left|\vec{k}\right|} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

3. Polariseringen til den elektromagnetiske bølgen har: Utslaget til det elektriske feltet er alltid langs $\vec{E}_0$, slik at bølgen er lineær-polarisert.

**c)** Det magnetiske feltet beskrives ved

$$\vec{B}\left(\vec{r},t\right) = \vec{B}_0 \cos\left(\vec{k}_B \cdot \vec{r} - \omega_B t + \varphi_B\right).$$

Maxwell's tredje ligning ovenfor gir

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ -\vec{k} \times \vec{E}_0 \sin\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi\right) &= -\omega_B \vec{B}_0 \sin\left(\vec{k}_B \cdot \vec{r} - \omega_B t + \varphi_B\right). \end{aligned}$$

Vi ser dermed at vi kan uttrykke

$$\begin{aligned} \omega_B &= \omega, \\ \varphi_B &= \varphi, \\ \vec{k}_B &= \vec{k}, \\ \vec{B}_0 &= \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0. \end{aligned}$$

## Oppgave 3. Materialfysikk

**a)** Med degenerasjon menes at flere forskjellige sett med kvante-tall gir den samme energien.

Fermioner kan ikke befinner seg i samme kvante-tilstand. Egenenergien er gitt ved

$$E_{n_1,n_2,n_3} = E_0 \left(n_1^2 + n_2^2 + n_3\right)\,, \tag{23}$$

Energi-nivåene og degenerasjons-graden for mange-partikkel-systemet blir

| Tilstand | Energi ($E_0$) | Degenerasjon |
|---|---|---|
| 111 | 3 | 1 |
| 112 | 4 | 1 |
| 211 | 6 | 2 |
| 212 | 7 | 2 |
| 221 | 9 | 1 |
| 222 | 10 | 1 |
| 113 | 11 | 1 |

Ved null temperatur er de laveste energi-nivåene fylt. Vi ser dermed at vi fyller de fire nederste energi-nivåene med 6 partikler. Total-energien blir

$$E = E_0 \left(1 \times 3 + 1 \times 4 + 2 \times 6 + 2 \times 7\right) = 33 E_0\,. \tag{24}$$

Bosoner kan være i samme kvantetilstand. Ved null temperatur vil da alle partiklene befinne seg i den samme laveste energi-tilstanden, $E_{1,1,1} = 3E_0$. Total-energien er da $6 \times E_{1,1,1} = 18E_0$.

**b)** Ett elektron er beskrevet ved den stasjonære tilstanden

$$\psi(x) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/4} \exp - \left(\frac{a}{2}(x-b)^2\right) \tag{25}$$

der $a$ og $b$ er to konstanter. Forventningsverdien til posisjonen er gitt ved

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^\dagger(x) x \psi(x).$$

Vi ser at bølgefunksjonen er sentrert rundt $x = b$ og velger derfor en ny integrasjons-variabel $x = u + b$:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} du \psi^\dagger(u+b)\,(u+b)\,\psi(u+b).$$

Siden bølgefunksjonen er normert og sentret rundt origo i koordinatsystemet bestem av $u$ finner vi

$$\langle x \rangle = b.$$

Tilsvarende kan vi nå finne for forventningsverdien til impulsen:

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^\dagger(x) \left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right) \psi(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^\dagger(u+b) \left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{du}\right) \psi(u+b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

siden $\psi(u+b)$ er symmetrisk rundt $u = 0$, slik at $d\psi(u+b)/du$ er antisymmetrisk rundt $u = 0$.

**c)** Frie elektroner i metaller blir beskrevet som elektroner i en tre-dimensjonal kube med lengde $L$ og elektron-tetthet $N$. Hva menes med Fermi-energien til systemet? Uttrykk Fermi-energien ved elektronets masse og elektron-tettheten.

Fermi-energien er maksimal-energien til en partikkel ved det absolutte null-punkt for et mange-fermion system.

For en tre-dimensjonal partikkel i boks-system er energi-nivåene gitt ved

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right),$$

hvor $n_x$, $n_y$ og $n_z$ er positive diskrete heltall. Det er to spinn-tilstander. Antall parikler innenfor en radius $n_F$ med positive heltall (1/8 av en hel kule) er dermed

$$N = 2\frac{1}{8}\frac{4\pi}{3} n_F^3 = \frac{\pi}{3} n_F^3$$

Fermi-energien er dermed gitt ved

$$\begin{aligned} E_F &= \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 n_F^2, \\ &= \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{3N}{\pi}\right). \end{aligned}$$

Vi vet også at antall partikler er $N = n_e L^3$, der $n_e$ er elektron-tettheten. Dermed blir

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m}(3n_e\pi^2)^{2/3}\,. \tag{26}$$

**d)** **Normale metaller** Et normalt metall er en god leder av elektrisk strøm. I en leder ligger Fermi-energien i et område der tettheten av tilstander er stor og dermed blir ledningsevnen god fordi det er mange elektroner som kan forflytte seg.

**Halvleder** En halvleder er en mellomting mellom en leder og en isolator der Fermi-energien ligger i et gap mellom et fylt og et ikke fylt energi-bånd, men gapet er ikke like stort som for en isolator og halvlederen kan lede strøm ved høyere temperaturer eller hvis halvlederen dopes med urenheter.

**Ferromagnet** En ferromagnet er et ledende metall som har et makroskopisk magnetisk moment. Det makroskopiske magnetiske moment skyldes at flere tilstander med spinn i en bestemt retning er okkupert enn tilstander med spinn i den motsatte retningen.

**Superleder** En superleder har null motstand ved lave temperaturer og den har en Meissner effekt som betyr at et eksternt magnetfelt ikke kan trenge inn i superlederen.