NTNU

Institutt for fysikk

Fakultet for naturvitenskap og teknologi

Løsningsforslag til eksamen i TFY4170 Fysikk 2 Fysikk 2

Torsdag 2. desember 2004

Dette løsningsforslaget er på 7 sider.

Oppgave 1. Kvantemekanikk

Et elektron med masse m befinner seg i en èn-dimensjonal boks i området $0 \leqslant x \leqslant a$ som er beskrevet ved potensialet

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant x \leqslant a\,, \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

Den tidsavhengige Schrødingerligningen som bestemmer materiebølgen til elektronet er gitt ved

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t). \tag{1}$$

Løsningen av denne bølgeligningen gir at den laveste energi-egentilstanden er gitt ved

$$\psi_0(x,t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\exp\left(-iE_0t/\hbar\right) & 0 \leqslant x \leqslant a\,, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \tag{2}$$

og den neste laveste energi-egentilstanden er gitt ved

$$\psi_1(x,t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\exp\left(-iE_1t/\hbar\right) & 0 \leqslant x \leqslant a\,, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

a) Bestem egen-energiene E_0 og E_1. Et elektron befinner seg i en tilstand som er beskrevet ved

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_0(x,t) + \psi_1(x,t)\right].$$

Hva er forventningsverdien til posisjonen til elektronet? Hva er forventningsverdien til energien til elektronet? Kommenter resultatet.

Løsning:

Vi finner egen-energien ved å sette inn i Schrødingerligningen i området $0 \leqslant x \leqslant a$:

$$\begin{aligned} \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\psi_0(x,t) &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_0(x,t) \\ \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\psi_0(x,t) &= E_0\psi_0(x,t) \end{aligned}$$

Dermed blir

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2.$$

Tilsvarende finner vi

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 = 4E_0.$$

Forventningsverdien til posisjonen er gitt ved

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\psi^\dagger(x,t)x\psi(x,t)\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dxx\,|\psi_0(x,t)|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} dxx\mathrm{Re}\left[\psi_0^\dagger(x,t)\psi_1(x,t)\right] + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dxx\,|\psi_1(x,t)|^2\\
&= \frac{1}{2}\frac{2}{a}\int_0^a dxx\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\\
&\quad + \cos\left((E_0-E_1)\,t/\hbar\right)\frac{2}{a}\int_0^a dxx\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{2}{a}\int_0^a dxx\sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{2}{a}\left(\frac{a}{\pi}\right)^2\int_0^\pi duu\sin^2(u)\\
&\quad + \cos\left((E_0-E_1)\,t/\hbar\right)\frac{2}{a}\left(\frac{a}{\pi}\right)^2\int_0^\pi dxx\sin(u)\sin(2u)\\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{2}{a}\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2\int_0^{2\pi} duu\sin^2(u)\\
&= \frac{1}{2}\frac{2}{a}\left(\frac{a}{\pi}\right)^2\frac{\pi^2}{4} - \cos\left((E_0-E_1)\,t/\hbar\right)\frac{16}{9\pi^2}a + \frac{1}{2}\frac{2}{a}\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2\pi^2\\
&= \frac{a}{2} - \frac{16}{9\pi^2}a\cos\left((E_0-E_1)\,t/\hbar\right)
\end{aligned}$$

Det betyr altså at partikkelen oscillerer om likevektsposisjonen $a/2$ med et utslag $\frac{16}{9\pi^2}a \approx 0.2a$.

Forventningsenergien til energien er gitt ved

$$\begin{aligned}
\langle E\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\psi^\dagger(x,t)i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\psi_0^\dagger(x,t)E_0\psi_0(x,t) + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\psi_0^\dagger(x,t)E_1\psi_1(x,t)\\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\psi_1^\dagger(x,t)E_0\psi_0(x,t) + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\psi_1^\dagger(x,t)E_1\psi_1(x,t)\\
&= \frac{1}{2}\left[E_0+E_1\right].
\end{aligned}$$

b) Bestem usikkerheten til energien til partikkelen. Befinner elektronet seg i en stasjonær tilstand eller ikke?

Løsning:

Usikkerheten til energien til partikkelen er gitt ved

$$\Delta E = \sqrt{\left\langle (E - \langle E \rangle)^2 \right\rangle} = \sqrt{\left\langle E^2 - \langle E \rangle^2 \right\rangle}.$$

Vi regner ut

$$\begin{aligned} \left\langle E^2 \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^\dagger(x,t) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \psi(x,t) \\ &= \frac{1}{2} \left[E_0^2 + E_1^2 \right]. \end{aligned}$$

Usikkerheten til energien er dermed

$$\begin{aligned} \Delta E &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[E_0^2 + E_1^2 \right] - \frac{1}{4} \left[E_0 + E_1 \right]^2} \\ &= \frac{1}{2} \left| E_0 - E_1 \right|. \end{aligned}$$

Energien til elektronet er ikke skarpt definert. Elektronet befinner seg derfor ikke i en stasjonær tilstand.

Oppgave 2. Bølgefysikk

a) Anta at en èn-dimensjonal bølge beveger seg i et medium slik at det ved $x = 0$ og $x = L$ ikke kan være noe bølgeutslag. Utled avstanden mellom nodene Δx til enkle harmoniske bølger med egenfrekvens ω. Det er antatt av bølgene er dispersjonsløse slik at forholdet mellom egenfrekvens og bølgetall er en frekvensuavhengig bølgehastighet $v = \omega/k$.

Løsning:

Det finnes to enkle harmonisk bølger med frekvens ω, en som beveger seg mot høyre og en som beveger seg mot venstre:

$$\begin{aligned} y_h(x,t) &= A_h \exp(i\,(kx - \omega t)), \\ y_v(x,t) &= A_v \exp(i\,(-kx - \omega t)), \end{aligned}$$

der amplitudene A_h og A_v er vilkårlige konstanter. Bølgeutslaget ovenfor er en lineærkombinasjon av disse to bølgene som tilfredstiller kravet om null utslag på rand-punktene. Dette bestemmer koeffisientene A_h og A_v. Totalbølgen er

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y_h(x,t) + y_v(x,t) \\ &= \exp(-i\omega t) \left[A_h \exp(ikx) + A_v \exp(-ikx \right]. \end{aligned}$$

Bølgeutslaget skal være null i randpunktene:

$$\begin{aligned} \exp(-i\omega t) \left[A_h + A_v \right] &= 0, \\ \exp(-i\omega t) \left[A_h \exp(ikL) + A_v \exp(-ikL \right] &= 0. \end{aligned}$$

Dette skal være gyldig til alle tider og fører til at

$$A_h = -A_v$$

og

$$\exp(ikL) - \exp(-ikL) = 0\,.$$

Dermed blir

$$k_n L = n\pi,$$

der n er et heltall større enn null. Bølgen er dermed beskrevet ved

$$y(x,t) = iA_h \exp(-i\omega_n t)\sin(\frac{n\pi}{L}x),$$

der n er et heltall større en null. Avstanden mellom nodene er gitt ved

$$\frac{n\pi}{L}\Delta x = \pi,$$

slik at vi finner at avstanden mellom nodene er

$$\Delta x = L/n.$$

Bølgelengden er

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k} = \frac{2L}{n}\,,$$

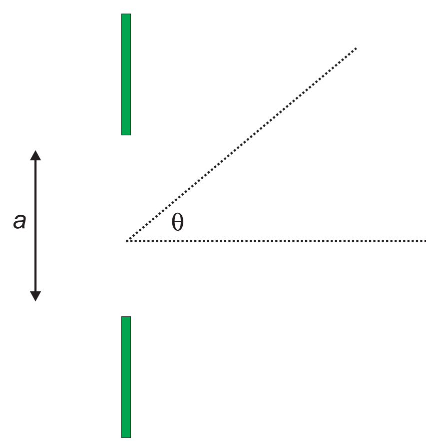
slik at vi kan uttrykke avstanden mellom nodene som

$$\Delta x = \lambda_n/2\,.$$

Egenfrekvensen er

$$\begin{aligned}\omega_n &= vk_n \\ &= n\frac{\pi v}{L}.\end{aligned}$$

b) En planbølge med bølgelengde λ kommer fra venstre rett inn mot en åpning med høyde a som vist på figuren nedenfor.



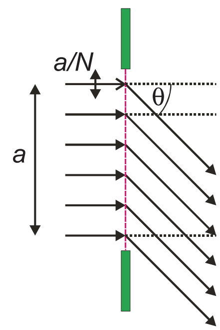
Vis at intensitets-avhengigheten til bølgen som kommer ut fra åpningen til høyre i en retning θ er gitt ved

$$\frac{I(\theta)}{I(\theta=0)} = \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2},$$

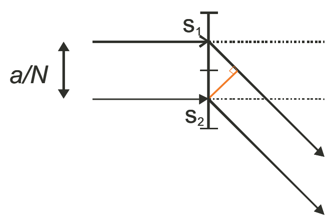
der

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta \,.$$

Løsning: Vi deler åpningen opp i N like deler som vist i figuren nedenfor.



Vi beregner bidrag fra to del-bølger som vist på den neste figuren.



Avstandsdifferansen mellom de to del-bølgene er $(a/N)\sin\theta$. Gitt at bølgelengden er λ svarer dette til en fasteforskjell som er

$$\phi = 2\pi \frac{a}{\lambda N} \sin\theta.$$

Det er N slike bidrag. Total-amplituden er dermed gitt ved

$$\begin{aligned} A_N(\theta) &= A_0 \left[\exp(i\phi \times 0) + \exp(i\phi \times 1) + ... \exp(i\phi \times (N-1))\right] \\ &= A_0 \left[[\exp(i\phi)]^0 + [\exp(i\phi)]^1 + ... [\exp(i\phi)]^{N-1}\right] \\ &= A_0 \frac{1-\exp(i\phi)^N}{1-\exp(i\phi)} \,. \end{aligned}$$

Vi er interessert i grensen der $N \to \infty$. Det betyr at $\phi \to 0$. Vi definerer

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta$$

Vi finner da

$$A_N(\theta) \approx A_0 \frac{1-\exp(i2\alpha)}{i2\alpha/N}.$$

For små vinkler er amplituden dermed

$$A_N(\theta \to 0) \approx -NA_0.$$

Intensiteten er dermed gitt ved

$$\frac{I(\theta)}{I(\theta = 0)} = \left| \frac{1 - \exp(i2\alpha)}{i2\alpha} \right|^2 = \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}$$

som vi skulle vise.

Oppgave 3. Materialfysikk

a) Gi en *kort* og *presis* definisjon av i) normale metaller, ii) halvledere, iii) ferromagneter, iv) superledere og v) isolatorer.

Løsning:

Normale metaller Et normalt metall er en god leder av elektrisk strøm. I en leder ligger Fermi-energien i et område der tettheten av tilstander er stor og dermed blir ledningsevnen god fordi det er mange elektroner som kan forflytte seg.

Halvleder En halvleder er en mellomting mellom en leder og en isolator der Fermi-energien ligger i et gap mellom et fylt og et ikke fylt energi-bånd, men gapet er ikke like stort som for en isolator og halvlederen kan lede strøm ved høyere temperaturer eller hvis halvlederen dopes med urenheter.

Ferromagnet En ferromagnet er et ledende metall som har et makroskopisk magnetisk moment. Det makroskopiske magnetiske moment skyldes at flere tilstander med spinn i en bestemt retning er okkupert enn tilstander med spinn i den motsatte retningen.

Superleder En superleder har null motstand ved lave temperaturer og den har en Meissner effekt som betyr at et eksternt magnetfelt ikke kan trenge inn i superlederen.

Isolator En isolator er et fast stoff som har en meget dårlig ledningsevne. Dette skyldes at Fermi-energien ligger i et gap som er stort slik at det er vanskelig å eksitere elektroner som kan lede en strøm. Isolatorer har også liten elektronisk varmekapasitet.

b) Frie elektroner i et metall blir beskrevet som elektroner i en tre-dimensjonal boks med lengde L og elektron-tetthet n_e. Hva menes med tilstands-tettheten i et fast stoff? Tilstands-tettheten for frie elektroner i en tre-dimensjonal boks med lengde L er

$$g(E) = \frac{\pi E^{1/2}}{2E_0^{3/2}}, \tag{3}$$

der

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{L^2}. \tag{4}$$

Hva menes med Fermi-energien til systemet? Uttrykk Fermi-energien ved elektronets masse m og elektrontetthet n_e.

Løsning:

Fermi-energien er maksimal-energien til en partikkel ved det absolutte null-punkt for et mange-fermion system.

Antall elektroner i systemet er

$$N = \int_0^{E_F} g(E)dE = \frac{\pi}{2E_0^{3/2}} \frac{2}{3} E_F^{3/2} \,. \tag{5}$$

Vi vet også at antall partikler er $N = n_e L^3$. Dermed blir

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m}(3n_e\pi^2)^{2/3} \,, \tag{6}$$

Følgende integraler kan komme til nytt ved løsningene av oppgavene:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} du u \sin^2(u) &= \frac{\pi^2}{4}. \\
\int_0^{\pi} du u \cos^2(u) &= \frac{\pi^2}{4} \\
\int_0^{2\pi} du u \sin^2(u) &= \pi^2. \\
\int_0^{2\pi} du u \cos^2(u) &= \pi^2 \\
\int_0^{\pi} du u \sin(u) \sin(2u) &= -\frac{8}{9}. \\
\int_0^{\pi} du u \sin(u) \cos(2u) &= -\frac{\pi}{3}. \\
\int_0^{\pi} du u \cos(u) \sin(2u) &= \frac{2\pi}{3}. \\
\int_0^{\pi} du u \cos(u) \cos(2u) &= -\frac{10}{9}
\end{aligned}$$