NTNU

Institutt for fysikk

Fakultet for naturvitenskap og teknologi

Løsningsforslag til eksamen i TFY4170 Fysikk 2 Fysikk 2

Lørdag 8. august 2005

Merk: Hver del-oppgave teller like mye.

Dette løsningsforslaget er på 5 sider.

Oppgave 1.

a) Amplituden i avstand r fra en kule-bølge er

$$y(r,t) = \frac{A}{r} \exp i(kr - \omega t + \phi)\,. \tag{1}$$

Den totale effekten som brer seg gjennom et kule-skall er bevart. Arealet av et kule-skall er $4\pi r^2$. Intensiteten i avstand r fra høytaler nummer 2 er derfor

$$I_2(r) = \frac{P_2}{4\pi r^2} = |y_2(r,t)|^2\,. \tag{2}$$

Vi velger dermed $A_2 = \sqrt{P_2/(4\pi)}$. Vi setter inn P_2 =1W og $r = 100$m og får

$$I(r) = \frac{P_2}{4\pi r^2} = 0.8 \times 10^{-5}\text{Wm}^{-2}\,. \tag{3}$$

Nedre hørselsgrense er $I_0 = 10^{-12}\text{Wm}^{-2}$. Lydstyrken i desibel er dermed

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{0.8 \times 10^{-5}}{10^{-12}} = 69\text{dB}\,. \tag{4}$$

b) Her er avstanden d mellom høytalerne mye mindre enn avstanden r. Avstands-forskjellen mellom høytaler 1 og høytaler 2 og mellom høytaler 2 og høytaler 3 er

$$\Delta r = d sin\theta\,. \tag{5}$$

Det resulterer i en relative fase-forskjell p.g.a. gang-avstanden som er

$$\alpha = k\Delta r\,. \tag{6}$$

Den resulterende amplituden fra de tre høytalerne blir dermed

$$\begin{aligned} y(r,t) &= y_1(r,t) + y_2(r,t) + y_3(r,t) & (7)\\ &= y_2(r,t)\left[1 + \sqrt{\frac{P_3}{P_2}}\exp i(\phi_3 - \phi_2 + \alpha) + \sqrt{\frac{P_1}{P_2}}\exp i(\phi_1 - \phi_2 - \alpha)\right] & (8)\\ &= \sqrt{\frac{P_2}{4\pi}}\frac{1}{r}\left[1 + 4\exp i(\phi_3 - \phi_2 + kd\sin\theta) + \frac{1}{4}\exp i(\phi_1 - \phi_2 - kd\sin\theta)\right]. & (9)\end{aligned}$$

Intensiteten er dermed gitt ved

$$\begin{aligned} I &= \frac{P_2}{4\pi r^2}\left|1 + 4\exp i(\phi_3 - \phi_2 + kd\sin\theta) + \frac{1}{4}\exp i(\phi_1 - \phi_2 - kd\sin\theta)\right|^2 & (10)\\ I &= \frac{P_2}{4\pi r^2}\times \\ & [\frac{273}{16} + 8\cos(\phi_3 - \phi_2 + kd\sin\theta) + \\ & \frac{1}{2}\cos(\phi_1 - \phi_2 - kd\sin\theta) + 2\cos(\phi_3 - \phi_1 + 2kd\sin\theta)]\,. & (11)\end{aligned}$$

Vi setter nå fasene like hverandre. Intensiteten forenkles dermed til

$$\begin{aligned} I &= \frac{P_2}{4\pi r^2}[\frac{273}{16} + \frac{17}{2}\cos(kd\sin\theta) + 2\cos(2kd\sin\theta)] & (12)\\ I &= 0.8\times 10^{-5}\mathrm{Wm}^{-2}[\frac{273}{16} + \frac{17}{2}\cos(kd\sin\theta) + 2\cos(2kd\sin\theta)]\,. & (13)\end{aligned}$$

Vi finner dessuten

$$kd = \frac{2\pi f}{v}d = \frac{2\pi 440}{340}\times 1.0 = 8.1\,. \quad (14)$$

Maksima/minima opptrer når $\partial I/(\partial\theta) = 0$. Derivasjon gir et maksima for $\theta = 0$ og $\theta = \pi$ og når

$$\sin(kd\sin\theta)\left[1 + \frac{16}{17}\cos(kd\sin\theta)\right] = 0 \quad (15)$$

det vil si når

$$kd\sin\theta = n\pi\,, \quad (16)$$

der n er et heltall. Insetting gir når n er et like hel-tall maksimums-intensiteten

$$I = 0.8\times 10^{-5}\mathrm{Wm}^{-2}[\frac{441}{16}]\,. \quad (17)$$

Maksimums-retningene er

$$\theta_{\max} = 0 \text{ grader, } 50 \text{ grader, } 130 \text{ grader, } 180 \text{ grader, } 230 \text{ grader og } 310 \text{ grader}\,. \quad (18)$$

Minimums-intensiteten finnes når n er et odde tall:

$$I = 0.8\times 10^{-5}\mathrm{Wm}^{-2}[\frac{377}{16}]\,. \quad (19)$$

De lokale minimums-retningene er

$$\theta_{\min} = 23 \text{ grader, } 90 \text{ grader, } 157 \text{ grader, } 203 \text{ grader, } 270 \text{ grader og } 337 \text{ grader}\,. \quad (20)$$

c) Intensiteten er størst i dette punktet når alle fasene er like, $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3$.

Oppgave 2.

a) Schrødinger-ligningen er gitt ved

$$H(p_{\text{op}}, x)\psi(x,t) = E_{\text{op}} = \psi(x,t)\,. \tag{21}$$

Impuls-operatoren er

$$p_{\text{op}} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\,. \tag{22}$$

og energi-operatoren er

$$E_{\text{op}} = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\,, \tag{23}$$

og innsatt gir dette Schrødinger-ligningen vi skulle vise.

b) Separasjon av variable

$$\psi(x,t) = \Psi \exp\left(-if(t)\right) \tag{24}$$

gir den tidsuavhengige Schrødinger-ligningen

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}kx^2\right]\Psi(x) = E\Psi(x)\,. \tag{25}$$

og ligningen for den tidsavhengige funksjonen $f(t)$:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\exp\left(-if(t)\right) = E\exp\left(-if(t)\right). \tag{26}$$

Løsningen er dermed

$$f(t) = \frac{E}{\hbar}t\,. \tag{27}$$

Vi bestemmer så egen-energien E fra den tidsuavhengige Schrødinger-ligningen. Den første deriverte av bølgefunksjonen er

$$\frac{d}{dx}\Psi(x) = -\frac{1}{\hbar}\sqrt{mk}x\Psi(x)\,. \tag{28}$$

Den andre-deriverte av bølgefunksjonen er

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = \left[-\frac{1}{\hbar}\sqrt{mk} + \frac{1}{\hbar^2}mkx^2\right]\Psi(x)\,. \tag{29}$$

Den tidsuavhengige Schrødinger-ligningen gir dermed

$$\begin{aligned}
H(p_{\text{op}}, x)\Psi(x) &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{1}{\hbar}\sqrt{mk} + \frac{1}{\hbar^2}mkx^2\right) + \frac{1}{2}kx^2\right]\Psi(x) \\
&= \frac{1}{2}\hbar\sqrt{k/m}\Psi(x) && (30) \\
&= E\Psi(x) && (31)
\end{aligned}$$

Vi identifiserer $\omega = k/m$ og har dermed funnet at egen-energien er $E = \hbar\omega/2$.

c) Impuls-operatoren er $p_{\mathrm{op}} = (\hbar/i)\partial/\partial x$. Vi finner først

$$p_{\mathrm{op}}\Psi = i\sqrt{mk}x\Psi\,. \tag{32}$$

Forventningsverdien til impulsen kan dermed relateres til forventningsverdien til posisjonen som er gitt ved følgende uttrykk:

Forventnings-verdien til posisjonen er

$$\begin{aligned}
\langle x(t)\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t)x\psi(x,t)dx & (33)\\
\langle x(t)\rangle &= (\frac{mk}{\pi^2\hbar^2})^{1/4}\int_{-\infty}^{\infty} x\exp(-\frac{1}{\hbar}\sqrt{mk}x^2 & (34)\\
& & (35)
\end{aligned}$$

Vi ser da at $\langle x(t)\rangle = 0$ ved symmetri. Fluktuasjonene i posisjonen er gitt ved

$$\begin{aligned}
\langle x^2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t)x^2\psi(x,t)dx & (36)\\
\langle x^2\rangle &= (\frac{mk}{\pi^2\hbar^2})^{1/4}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\exp(-\frac{1}{\hbar}\sqrt{mk}x^2)dx & (37)\\
& & (38)
\end{aligned}$$

Vi substituerer $u = (mk)^{1/4}/\hbar^{1/2}$ og får

$$\begin{aligned}
\langle x^2\rangle &= (\frac{mk}{\pi^2\hbar^2})^{1/4}(\frac{\sqrt{mk}}{\hbar})^{-3/2}\int_{-\infty}^{\infty} u^2\exp(-u^2)du & (39)\\
\langle x^2\rangle &= (\frac{mk}{\pi^2\hbar^2})^{1/4}(\frac{\sqrt{mk}}{\hbar})^{-3/2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} & (40)\\
\langle x^2\rangle &= \frac{1}{2}\hbar\frac{1}{\sqrt{mk}}\,. & (41)
\end{aligned}$$

Dette gir

$$\Delta x = \left(\frac{1}{2}\hbar\frac{1}{\sqrt{mk}}\right)^{1/2}\,. \tag{42}$$

Ved symmetry ser vi da at for forventningsverdien til impulsen

$$\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t)p_{\mathrm{op}}\psi(x,t) = 0\,. \tag{43}$$

Ved delvis integrasjon finner vi

$$\begin{aligned}
\langle p^2\rangle &= -\hbar^2\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(x)\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) & (44)\\
\langle p^2\rangle &= \hbar^2\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{d}{dx}\Psi(x))^2 & (45)\\
\langle p^2\rangle &= mk\langle x^2\rangle & (46)\\
\langle p^2\rangle &= \frac{1}{2}\hbar\sqrt{mk} & (47)
\end{aligned}$$

Dette gir

$$\Delta p = \left(\frac{1}{2}\hbar\sqrt{mk}\right)^{1/2} . \tag{48}$$

Produkter av uskarphetene blir dermed

$$(\Delta x)(\Delta p) = \frac{1}{2}\hbar\,. \tag{49}$$

Heisenbergs usikkerhetsrelasjon er

$$(\Delta x)(\Delta p) \geq \frac{1}{2}\hbar\,. \tag{50}$$

Denne tilstanden gir dermed den nedre grensen for denne uskarpheten.