NTNU **Institutt for fysikk**

Faglig kontakt under eksamen:
Professor Arne Brataas
Telefon: 73593647

Eksamen i TFY4170 Fysikk 2
Mandag 12. desember 2005
15:00–18:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ C
Godkjent lommekalkulator.
K. Rottman: *Matematisk formelsamling*
Barnett and Cronin: *Mathematical formulae*
Sist i dette oppgavesettet er det gitt noen relasjoner som muligens kan være til nytte under eksamen. Kandidaten må selv tolke disse.

Merk: Hver del-oppgave teller like mye.

Dette oppgavesettet er på 5 sider.

Oppgave 1. Kvantemekanikk

Vi ser i denne oppgaven på en partikkel som beveger seg i én retning i en stasjonær tilstand. Bølgefunksjonen kan da skrives som $\Psi(x,t) = \psi(x)\exp(-iEt/\hbar)$, der E er energien til partikkelen, x er posisjonen, t er tiden, $\hbar = h/(2\pi)$ og h er Plancks konstant. $\psi(x)$ er den romlige delen av bølgefunksjonen.

a) Hva er den romlige delen av bølgefunksjonen $\psi_{\text{fri}}(x)$ og energien E_{fri} til en fri partikkel?

SVAR

En fri partikkel har en bestemt impuls og ubestemt posisjon. Den romlige delen av bølgefunksjonen er

$$\psi_{\text{fri}}(x) = A\exp\left(ipx/\hbar\right), \tag{1}$$

der p er impulsen, x er posisjonen og A er en normaliseringskonstant. Energien er

$$E_{\text{fri}} = \frac{p^2}{2m}. \tag{2}$$

b) En partikkel befinner seg i en én-dimensjonal boks der potensialet er null innenfor boksen ($0 < x < a$) og potensialet er uendelig stort utenfor boksen ($x < 0$ og $x > a$). Bølgefunksjonen til partikkelen $\psi(x)$ er en løsning av den stasjonære Schrödinger-ligningen innenfor boksen med tilhørende grensebetingelser på randen av boksen ($x = 0$ og $x = a$). Schrödinger-ligningen som beskrives bølgefunksjonen innenfor boksen ($0 < x < a$) er

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x). \tag{3}$$

Det kan vises at bølgefunksjonen til grunntilstanden er gitt ved

$$\psi_{\mathrm{g}}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} \,. \tag{4}$$

Finn et uttrykk for alle energinivåene og de tilhørende bølgefunksjonene for partikkelen.

SVAR

En generell løsning av Schrödinger-ligningen er

$$\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx), \tag{5}$$

der energien er

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \tag{6}$$

og A og B er konstanter som skal bestemmes fra grensebetingelsene. Grensebetingelsene for et uendelig potensial utenfor boksen er at

$$\psi(x = 0) = 0 \tag{7}$$

og

$$\psi(x = a) = 0 \,. \tag{8}$$

Dette gir ligningene

$$\begin{aligned} 0 &= B \quad (9) \\ 0 &= A \sin(ka) \,. \quad (10) \end{aligned}$$

Den siste ligningen er bare oppfylt dersom

$$ka = n\pi \,, \tag{11}$$

der n er et heltall større enn null, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Bølgefunksjonen blir dermed

$$\psi_n(x) = A \sin(\frac{n\pi x}{a}) \,. \tag{12}$$

Konstanten A bestemmes ved normalisering:

$$\begin{aligned} \int_0^a dx |\psi(x)|^2 &= 1 \,, \quad (13) \\ \int_0^a dx |A|^2 \sin^2(\frac{n\pi x}{a}) &= 1 \,, \quad (14) \\ |A|^2 \frac{a}{n\pi} \int_0^{n\pi} du \sin^2 u &= 1 \,, \quad (15) \\ a|A|^2 \frac{1}{2} &= 1 \,, \quad (16) \\ |A| &= \sqrt{\frac{2}{a}} \,. \quad (17) \end{aligned}$$

Vi kan velge en vilkårlig fase på konstanten A og setter $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$. Dermed kan vi skrive bølgefunksjonen som

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \tag{18}$$

og egen-energien er

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 . \tag{19}$$

c) Hva er forventningsverdien til posisjonen og impulsen i grunntilstanden ($\psi_g(x)$) til en partikkel i en boks som beskrevet ovenfor?

SVAR

Dette er et symmetrisk boks-potensial. Det er derfor sannsynlig at forventningsverdien til posisjonen for grunntilstanden er lik snitt-verdien til posisjonen av partikkelen i boksen, dvs. $a/2$. Grunntilstanden er den laveste egen-energi-tilstanden, dvs. $n = 1$, $\psi_g(x) = \psi_{n=1}(x)$. Vi finner ved direkte utregning:

$$\langle x \rangle = \int_0^a dx x |\psi_1(x)|^2 , \tag{20}$$

$$\langle x \rangle = \int_0^a dx x \frac{2}{a} \sin^2 \frac{\pi x}{a} , \tag{21}$$

$$\langle x \rangle = \frac{2}{a} (\frac{a}{\pi})^2 \int_0^\pi du u \sin^2 u , \tag{22}$$

$$\langle x \rangle = \frac{2}{a} (\frac{a}{\pi})^2 \frac{\pi^2}{4} \tag{23}$$

$$\langle x \rangle = \frac{a}{2} . \tag{24}$$

På samme måte kan vi finne forventningsverdien til impulsen:

$$\langle p \rangle = \int_0^a dx \psi_1(x)^* \left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}\right) \psi_1(x) , \tag{25}$$

$$\langle p \rangle = 0 . \tag{26}$$

Oppgave 2. Bølgefysikk

a) Hva menes med Huygens prinsipp?

SVAR

Huygens prinsipp: Hvert punkt i en bølge-front er en punkt-kilde som skaper den senere utviklingen av bølgen.

Hugyens prinsipp brukes til å f.eks. beregne diffraksjons-spekteret langt fra en spalte-åpning til en bølge som går gjennom spalteåpningen. Ved hjelp av Huygens prinsipp kan alle punktene i spalteåpningene betraktes som en punkt-kilde og summen av disse skaper diffraksjons-mønstereet.

b) Hva er bånd-breddeteoremet og dens analogi innen kvantemekanikken.

SVAR

En enkelt harmonisk bølge er overhodet ikke lokalisert, men består bare av en Fourier-komponent (bølgetall), dvs. når $\Delta x \to \infty$ vil $\Delta k \to 0$.

På den annen side er det også slik at lokalisering av en bølge i posisjonsrommet krever delokalisering i det Fourier-transformerte rommet, dvs. når $\Delta x \to 0$ vil $\Delta k \to \infty$.

Δx og Δk kan altså ikke velges uavhengige av hverandre. Denne sammenhengen er uttrykt ved båndbredde-teorement:

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2} \,. \tag{27}$$

Analogien i kvantemekanikken er Heisenbergs usikkerhetsrelasjon. Posisjonen og impulsen til en partikkel kan ikke bestemmes nøyaktig samtidig:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \,, \tag{28}$$

der $\hbar = h/(2\pi)$ og h er Plancks konstant. Impulsen kan uttrykkes ved bølgetallet ved $p = \hbar k$ og Heisenbergs usikkerhetsrelasjon er dermed det samme som båndbredde-teoremet for klassiske bølger.

Oppgave 3. Materialfysikk

a) Hva er Pauli-prinsippet?

SVAR

Pauliprinsippet er at to partikler med halvtallig spinn ikke kan være i samme kvante-tilstand.

b) Hva er Fermi-energien til elektronene i et metall?

SVAR

I et metall er alle tilstander besatt opp til Fermi-energien og ingen tilstander med energier høyere enn Fermi energien er besatt ved null temperatur.Fermi-energien er den høyeste energien til en tilstand som er okkupert ved det absolutte null-punkt.

Oppgitt:

Noen integraler som kan være nyttige:

$$\int_0^{n\pi} du \sin^2 u = \frac{n\pi}{2}, \text{ når } n \text{ er et positivt heltall} \tag{29}$$

$$\int_0^{n\pi} du\, u \sin^2 u = \frac{n^2\pi^2}{4}, \text{ når } n \text{ er et positivt heltall} \tag{30}$$