NTNU **Institutt for fysikk**

Faglig kontakt under eksamen:
Professor Arne Brataas
Telefon: 73593647

Eksamen i TFY4170 Fysikk 2

August 2006
?–?

Tillatte hjelpemidler: Alternativ C
Godkjent lommekalkulator.
K. Rottman: *Matematisk formelsamling*
Barnett and Cronin: *Mathematical formulae*
Sist i dette oppgavesettet er det gitt noen relasjoner som muligens kan være til nytte under eksamen. Kandidaten må selv tolke disse.

Merk: Hver del-oppgave teller like mye.

Dette oppgavesettet er på 5 sider.

Oppgave 1. Kvantemekanikk

Vi ser i denne oppgaven på en partikkel som kan bevege seg i én dimensjon og som er i en stasjonær tilstand. Vi antar at partikkelen er bundet av et kvadratisk potensial

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 \,, \tag{1}$$

der k er fjærkonstanten. Bølgefunksjonen skrives som $\Psi(x,t) = \psi(x)\exp(-iEt/\hbar)$, der E er energien til partikkelen, x er posisjonen, t er tiden, $\hbar = h/(2\pi)$ og h er Plancks konstant. Vi ser på en tilstand der, $\psi(x)$, den romlige delen av bølgefunksjonen er gitt ved

$$\psi(x) = Ax\exp - \frac{x^2}{2a^2} \,, \tag{2}$$

a er en konstant med dimensjon lengde og A er en normaliseringskonstant.

a) Bestem konstanten a slik at bølgefunksjonen $\psi(x)$ er en energi egentilstand. Hva er energien til partikkelen?

Løsning

Energien til partikkel er gitt ved egen-verdi problemet

$$H\psi(x) = E\psi(x) \,, \tag{3}$$

der Hamilton operatoren er

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2 \,, . \tag{4}$$

Vi får dermed.

$$
\begin{aligned}
H\psi(x) &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2\right] Ax \exp -\frac{x^2}{2a^2} && (5)\\
&= A\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d}{dx}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) + \frac{1}{2}kx^3\right] \exp -\frac{x^2}{2a^2} && (6)\\
&= A\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(-3\frac{x}{a^2} - \frac{x^3}{a^4}\right) + \frac{1}{2}kx^3\right] \exp -\frac{x^2}{2a^2} && (7)
\end{aligned}
$$

Dette er en energi egenfunksjon dersom

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{a^4} = \frac{1}{2}k \tag{8}$$

slik at

$$a = \left(\frac{\hbar^2}{km}\right)^{1/4} . \tag{9}$$

Egen energien er dermed

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{3}{2}\frac{\hbar^2}{m}\frac{1}{a^2} && (10)\\
&= \frac{3}{2}\frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{km}{\hbar^2}\right)^{1/2} , && (11)\\
&= \frac{3}{2}\hbar\sqrt{\frac{k}{m}} . && (12)
\end{aligned}
$$

b) Bestem normaliseringskonstanten A. Hva er forventningsverdien til posisjonen for denne partikkelen?

Løsning

Normaliseringskonstanden er gitt ved

$$
\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x)\psi(x) && (13)\\
&= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \exp -\frac{x^2}{a^2} && (14)\\
&= A^2 a^3 \int_{-\infty}^{\infty} du u^2 \exp -u^2 && (15)\\
&= A^2 a^3 \frac{1}{2}\sqrt{\pi} && (16)
\end{aligned}
$$

Vi finner dermed

$$A = \left(\frac{1}{2}a^3\sqrt{\pi}\right)^{-1/2} . \tag{17}$$

Forventningsverdien til posisjonen er gitt ved

$$
\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) x \psi(x) && (18)\\
&= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx x x^2 \exp -\frac{x^2}{a^2} && (19)\\
&= 0 . && (20)
\end{aligned}
$$

Oppgave 2. Bølgefysikk

a) Vi ser på bølger som beveger seg i en retning. To ulike bølgekilder (1 og 2) gir opphav til de enkelte del-bølgene

$$f_1(x) = A_1 \exp kx - \omega t \,, \tag{21}$$
$$f_2(x) = A_2 \exp kx - \omega t \,, \tag{22}$$

der $A1$ er amplituden til den første bølgen, A_2 er amplituden til den andre bølgen, k er bølgetallet og ω er bølgefrekvensen.

Hva blir intensiteten til den totale bølgen som er et resultat av de to bølgekildene dersom a) bølgene er koherente og b) bølgene er inkoherente?

Løsning

For koherente bølger er bølgeamplituden lik summen av de to bølgeamplitudene:

$$f(x) = f_1(x) + f_x(2) = (A_1 + A_2) \exp kx - \omega t \,. \tag{23}$$

Intensiteten til denne bølgen er dermed

$$I_a = |f(x)|^2 = |A_1 + A_2|^2 \,. \tag{24}$$

For inkoherente bølger vil intensiteten til de to bølgene være lik summen av intensitetene til de to del-bølgene:

$$I_b = I_1 + I_2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 \,. \tag{25}$$

Vi ser altså at de to intensitene kan være ulike.

b) En bølge er gitt ved bølgefunksjonen

$$f(x) = \cos\left(b\sqrt{\omega}x - \omega t\right) \,, \tag{26}$$

der ω er frekvensen til bølgen og b er en konstant. Hva er bølgehastigheten og gruppehastigeten til bølgen? I hvilken retning beveger bølgen seg?

Løsning

Vi innfører bølgetallet $k = b\sqrt{\omega}$. Et punkt i bølgen er gitt ved at at argumenten til den harmoniske funksjonen er konstant. Bølgehastigeten er dermed gitt ved

$$\frac{d}{dt}(kx - \omega t) = 0 \,, \tag{27}$$
$$k\frac{dx}{dt} = \omega \,. \tag{28}$$

Bølgehastigheten er dermed gitt ved

$$v = \frac{dx}{dt} \,, \tag{29}$$
$$= \frac{\omega}{k} \,, \tag{30}$$
$$v = \frac{\sqrt{\omega}}{b} \,. \tag{31}$$

Gruppehastigeten (til omhyllingskurven til bølgen) er gitt ved

$$
\begin{aligned}
v_g &= \frac{d\omega}{dk}\,, && (32)\\
&= = \frac{d}{dk}\frac{k^2}{b^2}\,, && (33)\\
&= \frac{2k}{b^2}\,, && (34)\\
&= \frac{2\sqrt{\omega}}{b}\,, && (35)\\
&= 2v\,. && (36)
\end{aligned}
$$

Bølgen beveger seg i positiv retning langs x aksen.

Oppgave 3. Materialfysikk

a) Anta at vi har et system der de to laveste en-partikkel-tilstandene er henholdsvis $\psi_1(\mathbf{r})$ med egen-energi E_1 og $\psi_2(\mathbf{r})$ med egen-energi E_2. Hva er den laveste egen-energien E og den tilhørende bølgefunksjonen $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ for et to-partikkel-system med koordinater $\mathbf{r}_1$ og $\mathbf{r}_2$ dersom a) de to partiklene er bosoner og b) de to partiklene er fermioner. Vi ser bort fra partiklenes spinn.

Løsning

(a) Når partiklene er bosoner kan de befinne seg i samme kvantetilstand. Bølgefunksjonen skal være symmetrisk ved ombytte av de to partiklene. Den laveste energi-egentilstanden er dermed

$$\psi_b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_1(\mathbf{r}_1)\psi_1(\mathbf{r}_2) \tag{37}$$

med energi $E = 2E_1$.

(b) Når partiklene er fermioner kan de *ikke* befinne seg i samme kvantetilstand. Bølgefunksjonen skal være antisymmetrisk ved ombytte av de to partiklene. Den laveste energi-egentilstanden er dermed

$$\psi_f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2}\left[\psi_1(\mathbf{r}_1)\psi_2(\mathbf{r}_2) - \psi_2(\mathbf{r}_1)\psi_1(\mathbf{r}_2)\right]\,. \tag{38}$$

med energi $E = E_1 + E_2$.

Vi ser at energi til to-fermion systemet er større enn energien til to-boson systemet.

b) Vi skal studere et én-dimensjonalt metall av lengde L ved null temperatur. Vi ser bort fra elektronets spinn og antar at elektronene ikke vekselvirker med hverandre. Eletron-tilstandene er gitt ved

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}\exp ikx \tag{39}$$

og vi benytter periodiske grensebetingelser slik at vi krever $\psi(x) = \psi(x + L)$. Hva er tettheten av tilstander på Fermi-nivået for dette metallet?

Løsning

De periodiske grensebetingelsene krever

$$k = 2\pi n\,, \tag{40}$$

der n er et heltall.

Energien til systemet er gitt ved

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \,. \tag{41}$$

Ved en gitt energi er alle tilstander opp til $|k| = k_E$ fylt. Antall elektroner i systemet er dermed

$$n_E = 2\frac{k_E}{2\pi} = 2\frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \,. \tag{42}$$

Tilstandstettheten ved Fermi-nivået er dermed gitt ved

$$D(E_F) = \frac{dn}{dE}|_{E=E_F} = \frac{m}{\pi E_F \hbar} \,. \tag{43}$$

Oppgitt:

Noen integraler som kan være nyttige:

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \exp -u^2 = \sqrt{\pi} \tag{44}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} du u^2 \exp -u^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{45}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} du u^4 \exp -u^2 = \frac{3}{4}\sqrt{\pi} \tag{46}$$