NTNU

Institutt for fysikk

Fakultet for naturvitenskap og teknologi

Løsningsforslag til eksamen i TFY4170 Fysikk 2

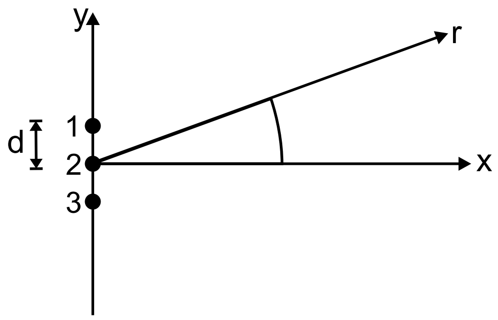
Onsdag 6. desember 2006

Merk: Hver deloppgave teller like mye.

Dette løsningsforslaget er på 5 sider.

Oppgave 1. Woodstock

Tre identiske høytalere ligger langs y-aksen med innbyrdes avstand $d = 1m$, se figur 1.



Figur 1: Skjematisk figur av høytaler/detektor-konfigurasjonen.

Hver høytaler sender ut lydbølger med frekvens $f = 440Hz$ og effekt $P = 200W$. Lydhastigheten i luft er $c = 340m/s$. Lydbølgen fra høytaler nummer 2 kan beskrives som

$$y_2(r,t) = \frac{A}{r} e^{i(kr - 2\pi f t + \phi)} \tag{1}$$

der A, k og ϕ er henholdsvis amplituden, bølgevektoren og fasen. Høytalerne 1 og 3 svinger i fase, mens høytaler 2 er defekt og svinger i motfase med 1 og 3. Det vil si at høytaler 2 har et minimum når 1 og 3 har et maksimum.

a) Finn intensiteten som funksjon av vinkelen $I(\theta)$ for en detektor som ligger på en sirkel med radius $r = 200m$ rundt høytalerne.

Løsning: Vi trenger først å finne A ved å se på effekten fra en høytaler. Effekten fra en høytaler som strømmer ut av en kuleskall med radius R er bevart og gitt ved

$$P = 4\pi R^2 \times I(R) = 4\pi R^2 \times |y(R)|^2 = 4\pi R^2 \times \frac{A^2}{R^2} = 200W \tag{2}$$

$$\rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{P}{4\pi}} = \sqrt{\frac{200W}{4\pi}} \simeq 3.99\sqrt{W} \tag{3}$$

For å finne intensiteten ved detektoren trenger vi å summere bølgeamplitudene. Vi sette fasen til høytaler nummer 2 til 0. Dette tvinger fasene til høytaler nummer 1 og 3 til π.

$$\begin{aligned}
y(r,t) &= y_1(r_1,t) + y_2(r,t) + y_3(r_3,t) && (4)\\
&= \frac{A}{r_1}e^{i(kr_1-2\pi ft+\pi)} + \frac{A}{r}e^{i(kr-2\pi ft)} + \frac{A}{r_3}e^{i(kr_3-2\pi ft+\pi)} && (5)\\
&\simeq \frac{A}{r}e^{i(kr-2\pi ft)}\left(e^{i(-kd\sin\theta+\pi)} + 1 + e^{i(kd\sin\theta+\pi)}\right) && (6)\\
&= \frac{A}{r}e^{i(kr-2\pi ft)}[1-2\cos(kd\sin\theta)] && (7)
\end{aligned}$$

Her er bølgevektoren $k = 2\pi f/c \simeq 8.13m^{-1}$. Intensiteten ved detektoren ($r = R = 200m$) er da

$$\begin{aligned}
I(\theta) = |y(r=200m,t)|^2 &= \frac{A^2}{R^2}[1-2\cos(kd\sin\theta)]^2 && (8)\\
&\simeq 4\times 10^{-4}[1-2\cos(8.13\sin\theta)]^2\frac{W}{m^2} && (9)
\end{aligned}$$

b) Angi også lydstyrken, i desibel, ved detektoren for $\theta = 0$ og $\theta = 0.397$ radianer ($\theta = 0°$ og $\theta = 22.75°$ grader) i forhold til den nedre hørselsgrense som er $I_0 = 10^{-12}Wm^{-2}$.

Løsning: Ved å bruke lingning 9 og $I_0 = 10^{-12}Wm^{-2}$ finner vi lydstyrken

$$\begin{aligned}
\beta(\theta=0) &= 10\log(\frac{I(\theta=0)}{I_0})dB && (10)\\
&\simeq 10\log(\frac{4\times 10^{-4}}{10^{-12}})dB \simeq 86.0dB && (11)
\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
\beta(\theta=0.397) &= 10\log(\frac{I(\theta=0.397)}{I_0})dB && (12)\\
&\simeq 10\log(\frac{4\times 10^{-4}\times 3^2}{10^{-12}})dB \simeq 95.6dB && (13)
\end{aligned}$$

Oppgave 2. Kvantegitarstreng

A-strengen på Jimi Hendrix's gitar er fastspent ved $x = 0$ og $x = L = 1m$. Gitar strengen veier $10g$. Svingningene til gitarstrengen $y(x,t)$ oppfyller følgende bølgeligning

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (14)$$

der bølgehastigheten $c = 440m/s$.

a) Vis ved å løse ligning 14 og grensebetingelsene at $y(x,t)$ til de fire første ståendebølgemodene er da gitt ved

$$y_n(x,t) = A_n\sin(k_n x)\cos(\omega t), \qquad (15)$$

der A_n er amplituden, ω er vinkelfrekvens og $k_n L = n\pi$ hvor $n = 1,2,3,4$. Tips: løsningen for ligning 14 kan bli konstruert som en sum av en høyre gående og en venstre gående bølge.

Løsning: Siden ligning 14 er en bølgeligning vil $y(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ være en løsning for ligning 14, dersom man ikke bryr seg om grensebetingelsene. Antar at løsningen på ligning 14 med grensebetingelsene kan skrives som en sum av en høyre gående og en venstre gående bølge $y(x,t) = A\sin(kx - \omega t) + B\sin(kx + \omega t)$. Ved $x = 0$,

$$y(x = 0, t) = 0 = A\sin(-\omega t) + B\sin(\omega t) \tag{16}$$

$$\rightarrow \quad A = B \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad y(x,t) &= A(\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)) &(18)\\ &= 2A\sin(kx)\cos(\omega t) &(19) \end{aligned}$$

Ved $x = L$,

$$y(x = L, t) = 0 = 2A\sin(kL)\cos(\omega t) \rightarrow \quad kL = n\pi \quad n = 1, 2, 3, 4.. \tag{20}$$

Dermed har vi vist at ligning 15 som beskriver ståendebølgermoder er en løsning av ligning 14.

b) Gitt at gitarstrengen i **a** har den spesielle egenskapen at de ståendebølgemodene må være normert som følgende

$$\int_0^L \frac{dx}{L}\left(\frac{y(x, t = 0)}{L}\right)^2 = 1. \tag{21}$$

Finn energien som er lagret i de fire første ståendebølgemodene. Tips: Finn først den maksimale kinetiske energien for en liten segment av gitarstrengen. Følgende integral

$$\int dx \ \sin^2(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) \tag{22}$$

kan være nyttige.

Løsning: Vi må først finne normeringskonstantene A_n.

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^L \frac{dx}{L}\left(\frac{A_n \sin(k_n x)}{L}\right)^2 &(23)\\ &= \frac{A_n^2}{k_n L^3}\int_0^{k_n L} du \sin^2(u) &(24)\\ &= \frac{A_n^2}{k_n L^3}\frac{k_n L}{2} &(25)\\ \rightarrow \quad A_n &= \sqrt{2L^2} &(26) \end{aligned}$$

Deretter trenger vi å finne maksimum kinetisk energi for et lite gitarsegment ved posisjon x. Hastigheten til et segment er gitt ved,

$$v_n(x,t) = \frac{\partial y_n(x,t)}{\partial t} = -A_n \omega \sin(k_n x)\cos(\omega t) \tag{27}$$

Dette gir maks hastighet $v_n^{maks}(x) = A_n \omega \sin(k_n x)$ og maks kinetisk energi $\epsilon_n^{maks}(x) = \frac{1}{2}\mu(v_n^{max}(x))^2$, der $\mu = 10g/L$ er masse per lengde enhet. Energien som er lagret i svingemodene er da

$$E_n = \int_0^L dx \frac{1}{2}\mu\epsilon_n^{max}(x) = \int_0^L dx \frac{1}{2}\mu(A_n\omega\sin(k_n x))^2 \tag{28}$$
$$= \frac{\mu A_n^2\omega^2}{2k_n}\int_0^{k_n L} du \sin^2(u) \tag{29}$$
$$= \frac{\mu A_n^2\omega^2}{2k_n}\frac{k_n L}{2} = \frac{\mu A_n^2 c^2 k_n^2 L}{4} = \frac{\mu L \pi^2 c^2 n^2}{2} \tag{30}$$
$$\simeq 9554J\ n^2 \quad n = 1,2,3,4 \tag{31}$$

Der vi har brukt bølgehastigheten $c = \omega/k$. Innsatt gitte verdier,

$$E_1 = 9554J \tag{32}$$
$$E_2 = 38215J \tag{33}$$
$$E_3 = 85984J \tag{34}$$
$$E_4 = 152860J \tag{35}$$

Oppgave 3. Fermioner på boks

Gitt en fermion med masse m fanget i en en-dimensjonal boks definert ved $V(x) = 0$ for $0 < x < L$ og uendelig ellers.

a) Skrive ned den tidsavhengige Schrødinger ligningen for problemet og vis ved å løse Schrødinger ligningen med separasjon av variabler at de fire første egentilstander er gitt ved:

$$\Psi_n(x,t) = A_n \sin(k_n x)e^{iE_n t/\hbar} \tag{36}$$
$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} \tag{37}$$
$$k_n = \frac{n\pi}{L} \tag{38}$$

hvor A_n er amplituden og $n = 1,2,3,4$

Løsning: Den tidsavhengige Schrødingerligningen for fermionet er gitt ved

$$\hat{H}\Psi = \frac{(\hat{p})^2}{2m}\Psi \rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \frac{(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})^2}{2m}\Psi \tag{39}$$

med grensebetingelsene $\Psi(x,t) = 0$ for $x \leq 0$ og $x \geq L$. Vi løser ligning 39 ved å separerer bølgefunksjonen $\Psi(x,t) = g(x)h(t)$ og deler ligning 39 med Ψ

$$\frac{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}h(t)}{h(t)} = \frac{\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x)}{g(x)} = E \tag{40}$$

Den siste likheten kommer fra det faktumet at første ledd avhenger kun på t mens andre ledd avhenger kun på x. Vi finner den generelle formen av $h(t)$,

$$h(t) = Ce^{-iEt/\hbar} \tag{41}$$

der C er en konstant. Vi finner så den generelle formen av $g(x)$

$$g(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx) \quad , \; k = \sqrt{2mE/\hbar^2} \tag{42}$$

$\Psi(x = 0, t) = 0$ gir $B = 0$. $\Psi(x = L, t) = 0$ gir $kL = n\pi$ der $n = 1, 2, 3, 4...$ Vi har dermed vist

$$\Psi_n(x,t) = g(x)\ h(t) A_n \sin(k_n x) e^{iE_n t/\hbar} \tag{43}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} \tag{44}$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad , \; n = 1, 2, 3, 4.. \tag{45}$$

b) Finn Fermienergien samt den totale energien til systemet uttrykt ved m og L gitt at systemet er i sin grunntilstand og inneholder tre ikke-vekselvirkende, spinn-$\frac{1}{2}$ fermioner. Angi også Fermienergien og den totale energien til systemet gitt at den er i sin grunntilstand og inneholde tre ikke-vekselvirkende fermioner uten å ta hensyn til deres spinn.

Løsning: Energien til de fire første egentilstandene er

$$E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2 1^2}{2mL^2} = E_1 \tag{46}$$

$$E_2 = 2^2 E_1 \tag{47}$$

$$E_3 = 3^2 E_1 \tag{48}$$

$$E_4 = 4^2 E_1 \tag{49}$$

For et system med spinn-$\frac{1}{2}$ elektroner: Hvert energi nivå kan ta imot to elektroner en med spinn opp og en med spinn ned. Fermienergien for tre elektroner er da E_2. De to første elektronene inntar nivå 1, en med spinn opp og en med spinn ned på grunn av Pauliprinsippet. Det tredje elektronet må innta nivå 2 på grunn av Pauliprinsippet. Den totale energien er da

$$E_{total} = 2 * E1 + E_2 = 5E_1 \tag{50}$$

For et system med spinnløs "fermion": Hvert energi nivå kan bare ta imot et fermion, siden vi ikke har noen spinndegenerasjon til å plassere flere fermioner på samme nivå. Fermienergien for tre partikler er da E_3. Den totale energien blir da

$$E_{total} = E1 + E_2 + E_3 = 14E_1 \tag{51}$$

Merk! at spinnløse fermioner ikke eksistere i virkeligheten.