NTNU

Institutt for fysikk

Fakultet for naturvitenskap og teknologi

Løsningsforslag til eksamen i TFY4170 Fysikk 2

Onsdag 05. desember 2007

Dette løsningsforslaget er på 3 sider.

Oppgave 1. Laserlys

a) Minimum i intensitetsmønsteret er gitt ved $\alpha = n\pi$, der n er et heltall. Innsatt for α gir dette betingelsen

$$\sin\theta = \frac{n\lambda}{a} \tag{1}$$

Ifølge oppgaven observeres første minimum for vinkelen

$$\tan\theta = \frac{0.00552}{1} \approx \sin\theta \tag{2}$$

Kombinerer vi disse to ligningene får vi

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{a} = 0.00552 \tag{3}$$

$$\lambda = 0.00552 \cdot 0.115\mathrm{m} \approx 635\mathrm{nm} \tag{4}$$

b) For en vinkel θ må lyset gjennom sidespaltene gå en lengde $d\sin\theta$ lenger/kortere enn lyset gjennom midt-spalten for å nå fram til skjermen. Det totale bølgeutslaget langt bak spaltene er derfor

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 + y_3 && (5)\\ &= y_2\left[e^{ikd\sin\theta} + 1 + e^{-ikd\sin\theta}\right] && (6)\\ &= y_2\left[1 + 2\cos(kd\sin\theta)\right] && (7)\end{aligned}$$

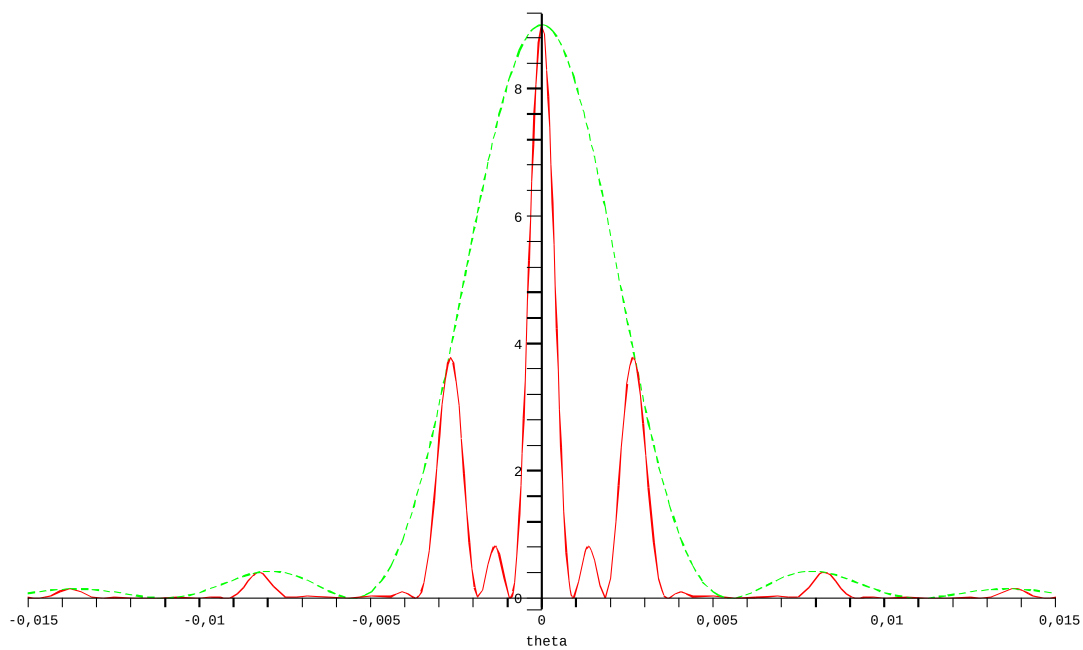
der y_i er bølgen fra spalt i og $k = 2\pi/\lambda$ er bølgetallet. Amplituden til totalbølgen er med andre ord $A = A_1[1 + 2\cos(kd\sin\theta)]$, der A_1 er amplituden til bølgen fra en enkelt spalt. Intensiteten er proporsjonal med kvadratet av amplituden, slik at

$$\frac{I}{I_1} = \frac{A^2}{A_1^2} = [1 + 2\cos(kd\sin\theta)]^2 \tag{8}$$

der I_1 er intensiteten for en enkelt spalt som gitt i ligning (1) i oppgaven. Dermed har vi

$$I = I_1\left[1 + 2\cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)\right]^2 \tag{9}$$

c) $I(\theta)$ er tegnet nedenfor (rød linje) for et lite område rundt $\theta = 0$. Den grønne stiplede hjelpelinja er diffraksjonsfaktoren gitt i ligning (1) i oppgaven (ganget med en faktor 9 for syns skyld), som modulerer tre-bølge-interferensen. Legg merke til at siden $d = 2a$, slukker diffraksjonsfaktoren ut interferenstopp nr. 2,4,6,... osv på begge sider av $\theta = 0$. Man kan også legge merke til at det i mellom hver interferenstopp er en mye mindre, sekundær interferenstopp. Interferensmønsteret er her plottet for verdiene gitt i oppgave a), $a = 0.115$ mm og $\lambda = 635$ nm.



Oppgave 2. Hydrogen og kalium

a) Ved å bruke uttrykket for nabla-operatoren i kulekoordinater, sette inn $\psi = R\Theta\Phi$, og gange ligningen med $2mr^2 \sin^2\theta/\hbar^2 R\Theta\Phi$ får vi

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -\frac{2mr^2\sin^2\theta}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right) - \frac{\sin^2\theta}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - \frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) \quad (10)$$

Venstre side avhenger nå bare av ϕ, mens høyre side bare avhenger av r og θ. Det betyr at begge sider må være lik den samme konstanten, som vi skriver $-m_l^2$ (m_l kan i utgangspunktet være kompleks, og både positiv og negativ). Dermed har vi

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -m_l^2\Phi, \quad (11)$$

$$\Phi = e^{im_l\phi}. \quad (12)$$

R og Θ er tilsvarende gitt ved høyre side av ligningen over, som ikke trengs løses her. Dette betyr at

$$\psi(r,\theta,\phi) = R(r)\Theta(\theta)e^{im_l\phi} \quad (13)$$

b) Forventningsverdien er

$$\langle r \rangle = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \psi_g^* r \psi_g r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \tag{14}$$

$$= 4\pi \int_0^\infty r^3 |\psi_g|^2 dr \tag{15}$$

$$= \frac{4}{a_0^3} \int_0^\infty r^3 e^{-2r/a_0} dr \tag{16}$$

$$= \frac{a_0}{4} \int_0^\infty u^3 e^{-u} du \tag{17}$$

$$= \frac{a_0}{4} 3! \tag{18}$$

$$= \frac{3a_0}{2} \tag{19}$$

c) Elektronkonfigurasjonen til K, Z=19, er $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s$. Det ytterste elektronet befinner seg utenfor helt fylte skall. Fylte skall har en kulesymmetrisk ladningsfordeling. Når en kulesymmetrisk ladningsfordeling betraktes utenfra ser den ut som om all ladningen var samlet i sentrum av kula. Det ytterste elektronet i K ser derfor en netto ladning $+Z - (Z-1)e = +e$ lokalisert i atomkjernen, slik som elektronet i hydrogen gjør.

Oppgave 3. Kvantemekanisk fri-elektron modell

Vi ser på det to-dimensjonale tilstandsrommet med akser n_1 og n_2. Energien kan skrives $E = E_0 n^2$, der $n = \sqrt{n_1^2 + n_2^2}$ er avstanden fra origo. Siden det er èn tilstand per areal, er antall tilstander i en kvart (n_1 og n_2 kan bare være positive) ring med radius n og tykkelse dn gitt ved $\frac{1}{4} 2\pi n dn \cdot 2$, der vi har ganget med en faktor 2 for spinn. Ved 0K er alle tilstander opp til $E_F = E_0 n_F^2$ okkupert. Totalenergien er derfor

$$E_{tot} = \int_0^{n_F} E_0 n^2 \cdot \pi n dn \tag{20}$$

$$= \frac{\pi E_0}{4} n_F^4 \tag{21}$$

$$= \frac{\pi E_F^2}{4 E_0} \tag{22}$$